

PROPRIETÀ:	COMUNI DI CESENATICO, GATTEO, GAMBETTOLA, LONGIANO, MONTIANO E RONCOFREDDO
UBICAZIONE:	COMUNI DI CESENATICO, GATTEO, GAMBETTOLA, LONGIANO, MONTIANO E RONCOFREDDO
OGGETTO:	PISTA CICLABILE LUNGO IL TORRENTE RIGOSSA NEI COMUNI DI CESENATICO, GATTEO, GAMBETTOLA, LONGIANO, MONTIANO E RONCOFREDDO BANDO DI FINANZIAMENTO "PR FESR 2021-2027 - AZIONE 2.8.1: BANDO PER FAVORIRE LA REALIZZAZIONE DI PISTE CICLABILI E PROGETTI DI MOBILITA' DOLCE E CICLOPEDONALE" DI CUI ALLA DELIBERA DI GIUNTA REGIONALE 658 DEL 27/04/2023 CUP: D51B23000230006
CONTENUTO:	Validazione software Opere di fondazione in c.a
PROGETTISTA:	RTI COSTITUITA DA: ING. MARCO NORI (CAPOGRUPPO), DOTT. LORIS VENTURINI, (MANDATARIO), MONITORA SAS (MANDATARIO)

P.F.T.E.

Data 10/03/2025

ELABORATO

10

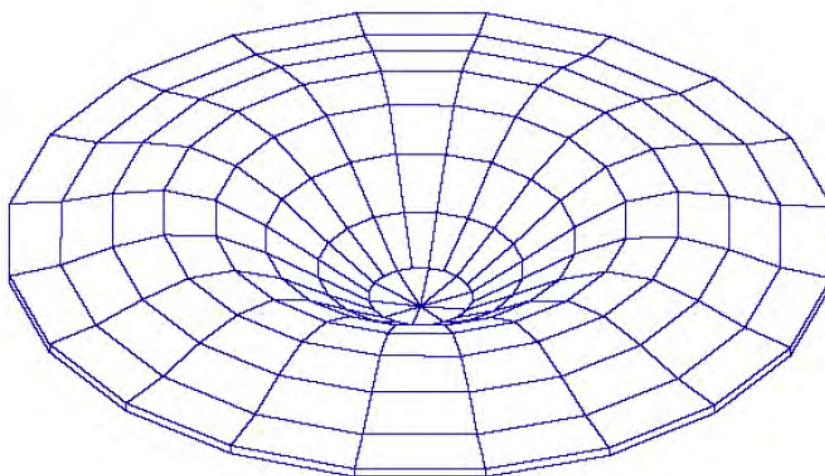
FIRMA COMMITTENTE/I

TIMBRO E FIRMA PROGETTISTA

C.D.Gs. Win

Rel. 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 e 2023

Validazione del codice di calcolo



VERIFICA DI PORTANZA DELLE FONDAZIONI

Descrizione esempio

Allo scopo di verificare l'accuratezza dei risultati forniti dal software *C.D.Gs. Win* si procede al calcolo manuale di verifica di portanza della fondazione del telaio a campata unica fondato su trave rovescia rappresentato in figura 1. La trave di fondazione ha lunghezza $L = 5 [m]$. Le caratteristiche geometriche della sezione trasversale sono rappresentate sempre in figura 1. In particolare l'altezza totale è $h = 0.6 [m]$ e la larghezza del magrone è $B = 0.9 [m]$.

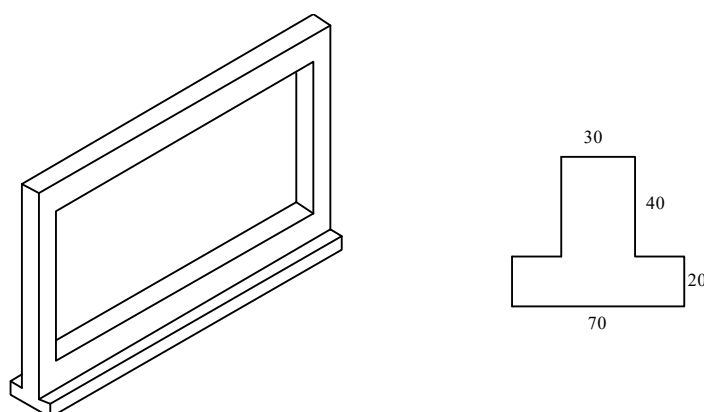


Fig. 1. Telaio fondato su trave rovescia

Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione $q_v = -1.5 [t/m]$. Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate nella tabella I e confermato dalla tabella di stampa di *C.D.Gs. Win* di seguito riportata:

Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ = 0.611 [rad]$
Coesione	$c = 0.1 [kg/cm^2]$
Modulo elastico	$E = 500 [kg/cm^2]$
Rapporto di <i>Poisson</i>	$\nu = 0.2$

Tab. I. Parametri meccanici suolo di fondazione

PARAMETRI GEOTECNICI TRAVI WINKLER												
IDENTIFICATIVO				CONDIZIONE DRENATA								NON DRENATA
Trave N.ro	Infiss m	Tipo Tabel	Gamma kg/mc	Fi' Grd	C' kg/cmq	Mod. El kg/cmq	Poisson	P base kg/cmq	Indice Rigid.	IndRig Crit.	Cu kg/cmq	P base kg/cmq
1	0.60	M1	1800	35.00	0.10	500.00	0.20	0.11	896.68	242.38	0.10	0.11

Per la fondazione sono stati fissati affondamento e ricoprimento nulli. Si prevede quindi che il piano di campagna sia coincidente con l'estradosso delle fonazioni, con una distanza fra i piani di

campagna e di posa delle fondazioni $D = h = 0.6 [m]$.

Carico sollecitante

Il risultato complessivo delle forze scaricate in fondazione dal telaio è:

$$R_v = |q_v| \cdot l = 1.5 [t/m] \cdot 5 [m] = 7.5 [t] = 7500 [kg]$$

Tale risultato è in accordo con quello fornito dal software, come mostrato dalla tabella di stampa di seguito riportata (anche in *C.D.Gs. Win* si è trascurato il peso proprio):

RISULTANTI SOLLECITAZIONI TRAVI WINKLER						
Trave N.ro	Combinazione N.ro	Rv (kg)	Vx (kg)	Vy (kg)	Mrx kg*cm	Mry kg*cm
1	A1 / 1	7500	0	0	0	0

Test di validazione formulazione classica

Il carico limite del terreno q_{lim} , da confrontare con il risultato delle forze scaricate in fondazione R_v , è determinato con la formula di *Brinch-Hansen*:

$$q_{lim} = q \cdot N_q \cdot \Psi_q \cdot i_q \cdot d_q \cdot b_q \cdot g_q \cdot s_q + c \cdot N_c \cdot \Psi_c \cdot i_c \cdot d_c \cdot b_c \cdot g_c \cdot s_c + \frac{1}{2} \gamma \cdot B' \cdot N_\gamma \cdot \Psi_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma \cdot s_\gamma$$

Sono di seguito valutati tutti i coefficienti presenti nella formula di Brinch-Hansen nel caso di condizione drenata.

Carico sul piano di fondazione

$$q = \gamma \cdot D = 1080 [kg]$$

Fattori di capacità portante

$$N_q = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \exp \{ \pi \tan(\varphi) \} = 33.296$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan(\varphi)} = 46.123$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1)\tan(\varphi) = 48.028$$

Coefficienti di punzonamento

$$\Psi_q = \Psi_\gamma = \exp\left\{\left(0.6\frac{B}{L} - 4.4\right)\tan(\varphi) + 3.07\frac{\sin(\varphi) \cdot \log(2I_R)}{1 + \sin(\varphi)}\right\} = 1$$

$$\Psi_c = \Psi_q - \frac{1 - \Psi_q}{N_q \tan(\varphi)} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$I_R = \frac{G}{c + q'\tan(\varphi)} = 896.677 \leq I_{CR}$$

con:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 208.333 [kg/cm^2] \quad ; \quad q' = \gamma\left(D + \frac{B}{2}\right) = 1890 [kg]$$

$$I_{CR} = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{3.3 - 0.45\frac{B}{L}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right\} = 242.377$$

Coefficienti di inclinazione del carico

$$i_q = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^m = 1$$

$$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_c \cdot \tan(\varphi)} = 1$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{H}{N + B \cdot L \cdot c \cdot \cotg(\varphi)}\right)^{m+1} = 1$$

Nelle precedenti si è posto:

$$m = m_B \cos^2(\vartheta) + m_L \sin^2(\vartheta) = 1.847$$

$$m_B = \frac{2 + \frac{B}{L}}{1 + \frac{B}{L}} = 1.847 \quad ; \quad m_L = \frac{2 + \frac{L}{B}}{1 + \frac{L}{B}} = 1.153 \quad ; \quad \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{Fh_B}{Fh_L} \right) = 0$$

essendo $Fh_B = 0$ ed $Fh_L = 0$ le forze orizzontali lungo B ed L , $H = \sqrt{Fh_B^2 + Fh_L^2} = 0$ il risultante di tali forze ed $N = R_v = 7500 [kg]$ il risultante delle forze verticali.

Coefficienti di affondamento del piano di posa

$$d_q = 1 + 2 \frac{D}{B} \tan(\varphi) \cdot (1 - \sin(\varphi))^2 = 1.17$$

$$d_c = d_q - \frac{1 - d_q}{N_c \tan(\varphi)} = 1.175$$

Coefficienti di inclinazione del piano di posa

$$b_q = b_\gamma = \exp \{ -2.7 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi) \} = 1$$

$$b_c = \exp \{ -2 \cdot \alpha \cdot \tan(\varphi) \} = 1$$

essendo $\alpha = 0$ l'inclinazione del terreno di fondazione

Coefficienti di inclinazione del terreno di fondazione

$$g_q = g_c = 1$$

Coefficienti di forma

$$s_q = 1 + \frac{B}{L} \tan(\varphi) = 1.126$$

$$s_c = 1 + \frac{B}{L} \frac{N_q}{N_c} = 1.13$$

$$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L} = 0.928$$

Carico limite

Sostituendo i coefficienti determinati nella formula di *Brinch-Hansen* si ha:

$$q_{lim} = 144.69 [t / m^2]$$

Il carico limite della fondazione si determina quindi moltiplicando q_{lim} per la superficie di impronta della fondazione e dividendolo per il coefficiente parziale $\gamma_R = 2.3$, e risulta:

$$Q_{lim} = \frac{q_{lim} \cdot B \cdot L}{\gamma_R} = 283.09 [t]$$

I risultati ottenuti risultano coincidenti con quelli forniti dal software *C.D.Gs. Win* di seguito riportati:

COEFFICIENTI DI PORTANZA TRAVI WINKLER - CONDIZIONI DRENATE																				
Trave N.ro	Brinch Hansen			Incl. terreno			Igk Sism	Comb N.ro	Coeff.Incl.Carico			Affondamento			Forma			Punzonamento		
	Nc	Nq	Ng	Gc	Gq	Gg			IcV	IqV	IgV	Dc	Dq	Dg	Sc	Sq	Sg	Psic	Psig	Psig
1	46.12	33.30	48.03	1.00	1.00	1.00	1.00	A1/1	1.00	1.00	1.00	1.18	1.17	1.00	1.13	1.13	0.93	1.00	1.00	1.00

PORTANZA TRAVI WINKLER														
IDENTIFICATIVO					DRENATE		NON DRENATE			RISULTATI				
Trave N.ro	Asta3d N.ro	Comb N.ro	Bx' m	By' m	GamEf kg/mc	QLimV (t)	GamEf kg/mc	QLimV (t)	N (t)	Coeff. Sicur.	Minimo CoeSic	N/Ar kg/cmq	QLim/Ar kg/cmq	Status Verifica
1	4	A1 / 1	0.90	5.00	1800	283.1			7.5	2.04	2.04	0.17	0.34	OK

Descrizione metodo di verifica non lineare

Il metodo di verifica proposto consiste nella valutazione del coefficiente di sicurezza λ_u dell'insieme terreno-fondazione, definito come:

$$\lambda_u = \frac{R_d}{E_d}$$

Per la valutazione del coefficiente λ_u è condotta un'analisi non lineare sulla sottostruttura, estrapolata dall'intero sistema strutturale, composta dagli elementi di fondazione ipotizzati come elastici e poggianti su suolo a comportamento non lineare.

Sul sistema strutturale così costruito è applicato un sistema di forze nodali determinate come gli scarichi in fondazione derivanti dalla sovrastruttura. L'analisi è condotta facendo crescere monotonamente le forze applicate sulla sottostruttura di fondazione fino al raggiungimento di uno stato limite geotecnico o strutturale.

Tale procedura consente quindi la determinazione del moltiplicatore a rottura dei carichi agenti, che ovviamente coincide con il coefficiente di sicurezza λ_u .

Come descritto, per eseguire la verifica di portanza delle fondazioni viene estrapolata dall'intero sistema strutturale una sottostruttura di fondazione. Questa è composta da tutti gli elementi strutturali a contatto con il suolo (travi rovesce, platee e plinti diretti o su pali) e da quelli che, pur non essendo elementi di fondazione, giacciono interamente sul medesimo piano di posa di almeno un elemento di fondazione.

Gli elementi strutturali che compongono la sottostruttura di fondazione sono modellati a comportamento elastico lineare e, se a contatto con il suolo, schematizzati come poggianti su un letto di molle a comportamento non lineare nei riguardi della componente verticale di spostamento ed elastico per le altre componenti di spostamento.

I legami costitutivi forza-spostamento ($p-u$) delle molle non lineari utilizzate per modellare il suolo sono del tipo elasto-plastico. In particolare nel caso di fondazioni superficiali (travi rovesce, platee, plinti diretti) il legame costitutivo è non resistente a trazione (Fig 2 a), mentre per i pali è esteso anche nel verso delle trazioni, con andamento differente rispetto a quello delle compressioni (Fig 2 b).

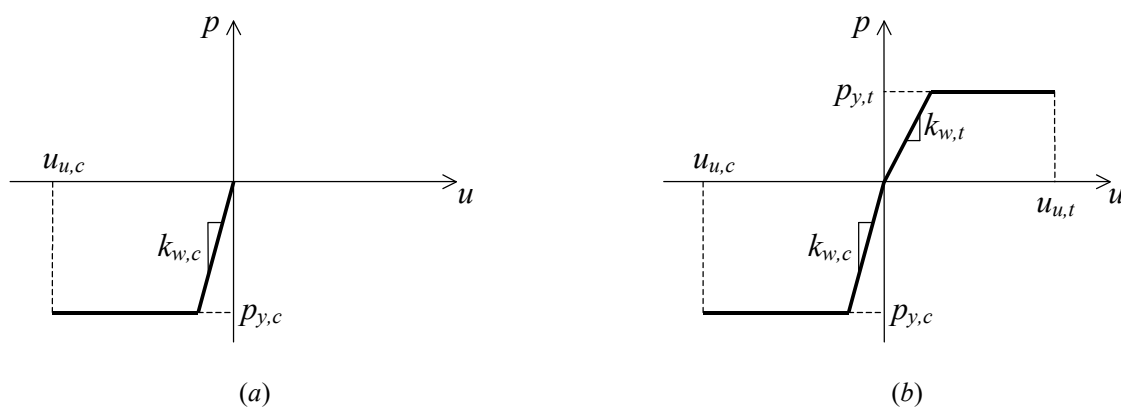


Fig. 2. Legami costitutivi molle non lineari: a) fondazioni superficiali; b) pali.

Per le fondazioni superficiali la rigidezza $k_{w,c}$ del tratto elastico del legame è valutata a partire dalla costante di *Winkler* del terreno tenendo conto della superficie di impronta di competenza della

singola molla. Per le fondazioni profonde le rigidezze $k_{w,c}$ e $k_{w,t}$ sono invece determinate tenendo conto sia delle caratteristiche del terreno che della geometria del singolo palo.

I valori di limite elastico $p_{y,c}$ e $p_{y,t}$ della forza sono dedotte dal valore Q_{lim} del carico limite calcolato con le normali teorie di *Brinch-Hansen* e *Vesic* non effettuando però la riduzione della superficie di impronta efficace di contatto fra fondazione e terreno.

Così come previsto da normativa sono eseguite verifiche agli stati limite ultimi sia del suolo di fondazione (SLU di tipo GEO) che degli elementi strutturali (SLU di tipo STR).

In particolare si assume che sia stato raggiunto lo stato limite ultimo del terreno se lo spostamento sotto una delle molle non lineari attinge al valore ultimo $u_{u,c}$ o $u_{u,t}$. Inoltre si ha lo stato limite ultimo nel terreno se tutte le molle che modellano il suolo hanno raggiunto la fase plastica del legame costitutivo. In questa condizione infatti non è più possibile equilibrare ulteriori incrementi di carico.

Per quanto riguarda gli elementi strutturali, essendo questi ipotizzati a comportamento elastico lineare, la verifica allo stato limite è ricondotta ad una verifica degli spostamenti relativi. Lo stato limite ultimo si ritiene raggiunto se la differenza fra gli spostamenti di due nodi dell'elemento risulta superiore ad 1/50 della distanza fra i nodi.

Le verifiche sono analoghe nel caso in cui sia condotta una verifica classica di portanza delle

fondazioni, con la sola differenza che in questo caso lo spostamento ultimo del terreno è assunto

pari a quello di limite elastico.

Test di validazione formulazione non lineare

È stata eseguita una prova di validazione del modulo di calcolo *C.D.Gs. Win* determinando il coefficiente di sicurezza delle fondazioni del telaio a campata unica fondato su trave rovescia le cui caratteristiche geometriche sono riportate in figura 3. Il telaio è soggetto ad un carico verticale linearmente distribuito applicato sulla trave in elevazione definito dai seguenti valori iniziale e finale $q_{iniz} = -1.2 [t/m]$ e $q_{fin} = -2.3 [t/m]$. Nell'analisi sono stati trascurati gli effetti dovuti al peso proprio degli elementi strutturali.

Le caratteristiche meccaniche del suolo di fondazione sono riportate in tabella II:

Costante di <i>Winkler</i>	$\varepsilon_w = 10 [kg/cm^3]$
Peso specifico	$\gamma = 1800 [kg/m^3]$
Angolo d'attrito	$\varphi = 35^\circ$
Coesione	$c = 0 [kg/cm^2]$

Tab. II. Parametri meccanici suolo di fondazione

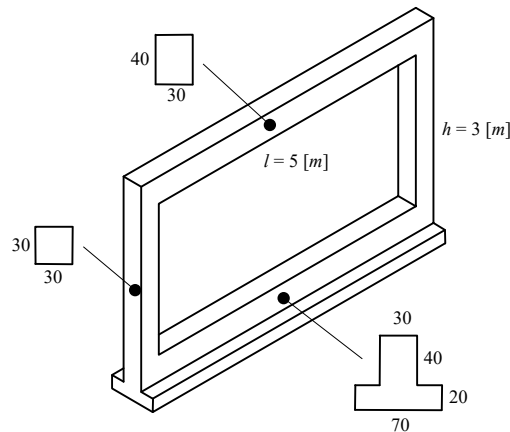


Fig. 3. Telaio fondato su trave rovescia

La verifica di portanza delle fondazioni eseguita con il modulo di calcolo automatico *C.D.Gs. Win* fornisce il moltiplicatore di collasso $\lambda_u = 17.550$.

È di seguito riportato il calcolo manuale del moltiplicatore λ_u secondo la procedura sopra descritta per valicare il risultato fornito da *C.D.Gs. Win*.

Adottando un numero di suddivisioni della trave di fondazione $n_{sudd} = 3$, lo schema statico da risolvere per eseguire la verifica di portanza è quello rappresentato in figura 4, formato da tre aste di lunghezza $\Delta l = l/n_{sudd} = 1.667 [m]$ collegato al suolo da 4 molle:

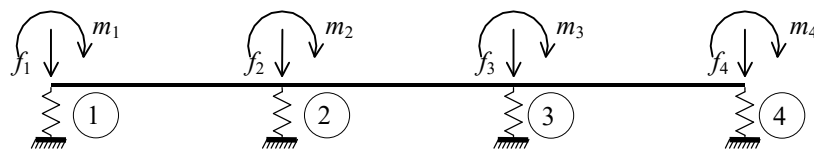


Fig. 4. Modello per la verifica di portanza

Le rigidezze iniziali $k_{w,i}$ e le forze di limite elastico $p_{y,i}$ delle molle sono determinate a partire dalla geometria della trave, dalla costante di *Winkler* ε_w e dal carico limite della trave che risulta $Q_{lim} = 169.9 [t]$. Per le molle si ha quindi:

$$\mathbf{k}_w = \begin{Bmatrix} \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l \\ \varepsilon_w b_w \Delta l / 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 81750 \\ 163500 \\ 163500 \\ 81750 \end{Bmatrix} [kN \cdot m^{-1}]$$

$$\mathbf{p}_y = \begin{Bmatrix} Q_{lim} / (2 n_{sudd}) \\ Q_{lim} / n_{sudd} \\ Q_{lim} / n_{sudd} \\ Q_{lim} / (2 n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 277.786 \\ 555.573 \\ 555.573 \\ 277.786 \end{Bmatrix} [kN]$$

avendo indicato con $b_w = 1.0 [m]$ la larghezza del magrone della trave di fondazione.

Le forze ed i momenti nodali agenti sono determinate a partire dai corrispondenti valori globali scaricati sulla trave dalla sovrastruttura, che sono $f_{tot} = 8750 [kg]$ e $m_{tot} = 229167 [kg \cdot cm]$.

Risulta quindi:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_{tot} / (2 n_{sudd}) \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / n_{sudd} \\ f_{tot} / (2 n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.306 \\ 28.613 \\ 28.613 \\ 14.306 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{tot} / (2 n_{sudd}) \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / n_{sudd} \\ m_{tot} / (2 n_{sudd}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.747 \\ 7.494 \\ 7.494 \\ 3.747 \end{Bmatrix} [kN \cdot m]$$

Modellando la struttura di figura 4 come piana, l'equazione di equilibrio della stessa può essere scritta nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_w & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}^T & \mathbf{K}_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{Bmatrix}$$

Nella precedente relazione \mathbf{u} e ϕ sono i sottovettori dei gradi di libertà nodali e \mathbf{K}_w è la matrice diagonale delle rigidezze delle molle:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} k_{w,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{w,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{w,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{w,4} \end{bmatrix}$$

Le sottomatrici di rigidità \mathbf{K}_u , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e \mathbf{K}_ϕ , utilizzando le unità di misura kN per le forze e m per le lunghezze, risultano:

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} 6.005 \cdot 10^5 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 1.201 \cdot 10^6 & -6.005 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -6.005 \cdot 10^5 & 6.005 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \begin{bmatrix} 5.004 \cdot 10^5 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & -5.004 \cdot 10^5 & 0 & 5.004 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & -5.004 \cdot 10^5 & -5.004 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_\phi = \begin{bmatrix} 5.56 \cdot 10^5 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 1.112 \cdot 10^6 & 2.78 \cdot 10^5 \\ 0 & 0 & 2.78 \cdot 10^5 & 5.56 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Risolvendo la struttura in oggetto nell'ipotesi di molle a comportamento elastico lineare si ottengono i seguenti abbassamenti nodali:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.287 \cdot 10^{-4} \\ 1.619 \cdot 10^{-4} \\ 1.881 \cdot 10^{-4} \\ 2.213 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

Il moltiplicatore dei carichi λ_1 cui corrisponde la prima plasticizzazione di una molla si determina come:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{u_{y,i}}{\bar{u}_i^{(1)}} ; \quad i = 1, \dots, 4 \right\}$$

essendo $u_{y,i} = p_{y,i} / k_{w,i}$ gli spostamenti di limite elastico delle molle.

Risulta:

$$\lambda_1 = \frac{u_{y,4}}{\bar{u}_4^{(1)}} = 15.355$$

Sotto le forze esterne $\lambda_1 \mathbf{f}$ e $\lambda_1 \mathbf{m}$ si ha quindi la plasticizzazione della molla 4 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \lambda_1 \bar{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando le forze di $\Delta\lambda$ queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma priva della molla del nodo 4, e quindi nella matrice \mathbf{K}_w dovrà essere posta pari a 0 la 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1.976 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 4.539 \cdot 10^{-5} \\ 2.487 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 1.346 \cdot 10^{-4} \\ 2.888 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.677 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.716 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} [m]$$

essendo $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$ il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice \mathbf{K}_w .

Il moltiplicatore dei carichi λ_2 cui corrisponde la plasticizzazione di una seconda molla si determina come:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = \lambda_1 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(1)}}{\bar{u}_i^{(2)}}; \quad i = 1, \dots, 3 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{u_{y,3} - \lambda_1 u_3^{(1)}}{\bar{u}_3^{(2)}} = 1.388 \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 16.743$$

Sotto le forze esterne $\lambda_2 \mathbf{f}$ e $\lambda_2 \mathbf{m}$ si ha quindi la plasticizzazione della molla 3 e gli spostamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \Delta\lambda_2 \bar{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} [m]$$

Incrementando ancora le forze di $\Delta\lambda$ queste saranno equilibrate da una struttura analoga a quella di figura 4 ma adesso priva delle molle dei nodi 3 e 4, e quindi nella matrice \mathbf{K}_w dovranno essere poste pari a 0 le 3° e 4° componente della diagonale principale. Sotto tale incremento di forze gli abbassamenti nodali sono:

$$\mathbf{u}^{(2)} + \Delta\lambda \bar{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 2.039 \cdot 10^{-3} - \Delta\lambda \cdot 6.900 \cdot 10^{-4} \\ 2.673 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 8.700 \cdot 10^{-4} \\ 3.398 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 3.375 \cdot 10^{-4} \\ 4.608 \cdot 10^{-3} + \Delta\lambda \cdot 6.351 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \quad [m]$$

essendo $\bar{\mathbf{u}}^{(3)}$ il vettore degli abbassamenti nodali ottenuti dall'equazione di equilibrio avendo però modificato come descritto la matrice \mathbf{K}_w .

Il moltiplicatore dei carichi λ_3 cui corrisponde la plasticizzazione di un'altra molla si determina come:

$$\lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = \lambda_2 + \min \left\{ \frac{u_{y,i} - u_i^{(2)}}{\bar{u}_i^{(3)}}; \quad i = 1, 2 \right\}$$

e risulta:

$$\Delta\lambda_3 = \frac{u_{y,2} - u_2^{(2)}}{\bar{u}_2^{(3)}} = 0.833 \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda_3 = 17.576$$

Sotto le forze esterne $\lambda_3 \mathbf{f}$ e $\lambda_3 \mathbf{m}$ risultano quindi plasticizzate le molle 2, 3 e 4. In tale condizione la struttura non è più in grado di equilibrare incrementi delle forze applicate e quindi il moltiplicatore λ_3 coincide con quello ultimo.

Il risultato ottenuto mostra un ottimo accordo fra il valore fornito dal codice di calcolo e quello esatto. L'errore percentuale è infatti poco superiore allo 0.1% come di seguito mostrato:

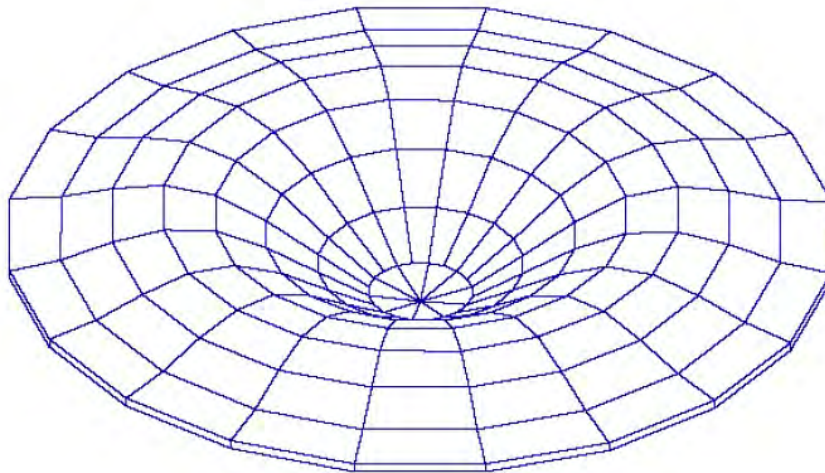
$$err = 100 \cdot \frac{|\lambda_3 - \lambda_u|}{\lambda_3} = 0.14\%$$

CDPWin - Computer Design of Plinths

C.D.P. Win

Rel. 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 e 2023

Validazione del codice di calcolo



Software
Tecnico
Scientifico S.r.l.

Test pratico di validazione numerica del calcolo di un plinto diretto e di plinto rettangolare su pali

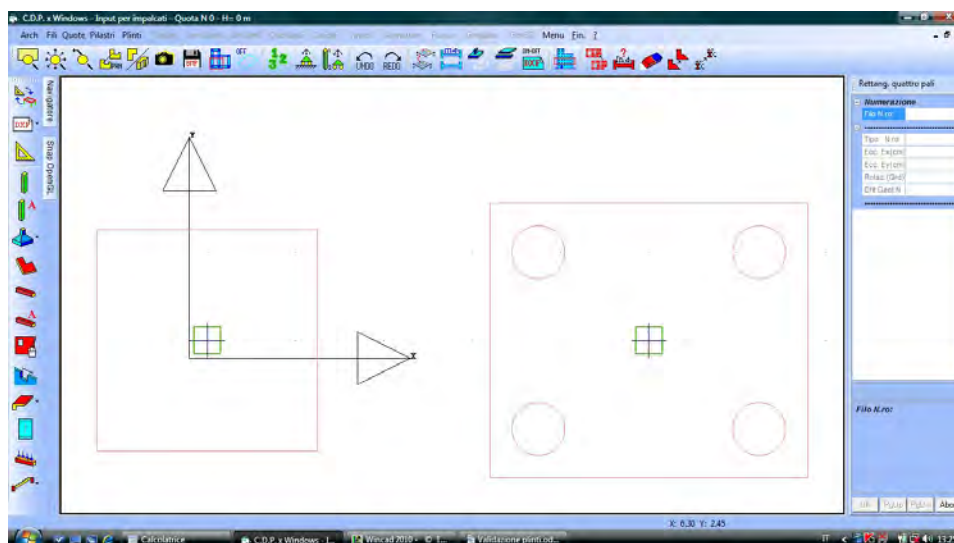
Ipotesi di calcolo

Il calcolo di fondazioni a plinti, isolati o collegati da cordoli, viene effettuato sfruttando alcune ipotesi che si suppongono sempre soddisfatte: il plinto viene considerato un corpo perfettamente rigido; nel caso di plinti diretti il terreno è schematizzato come suolo elastico alla *Winkler*, non reagente trazione; nel caso di plinti su pali si suppone nullo il contributo del terreno, affidando interamente gli scarichi ai pali; i pali, ai fini della ripartizione degli scarichi, si ipotizzano come vincoli elastici, sia assialmente che per azioni taglianti orizzontali.

Tali ipotesi, largamente condivise in letteratura, servono a ricavare, noti gli scarichi complessivi agenti su ciascun plinto, le reazioni distribuite nel terreno, nel caso di plinti diretti, o gli scarichi agenti su ciascun palo. Da questi si calcolano poi le sollecitazioni interne del plinto, da utilizzare per le verifiche di resistenza, da effettuare in ottemperanza alle norme vigenti con il metodo degli stati limite.

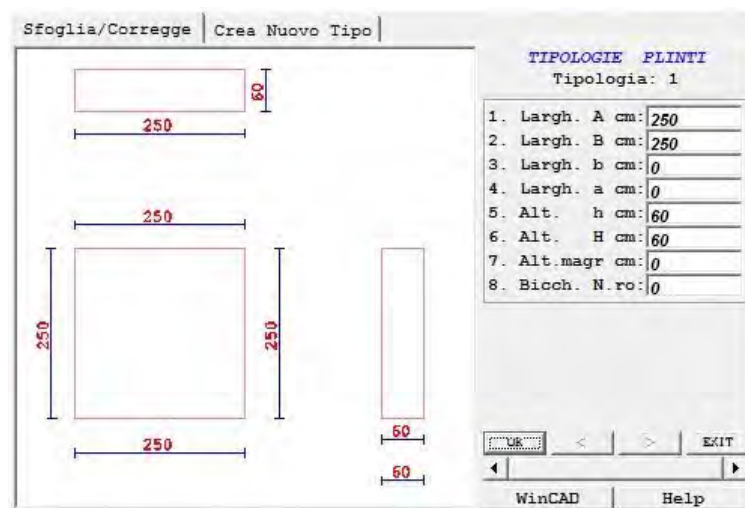
Per quanto riguarda le verifiche di resistenza, il plinto viene schematizzato in modo molto semplice come una serie di mensole, incastrate alla base del pilastro, caricate dalla pressione del terreno, nei plinti diretti, o dagli sforzi di compressione risultanti in testa a ciascun palo, nel caso di plinti su pali, che si considerano puntiformi e applicate in corrispondenza del baricentro della sezione di testa del palo.

I singoli pali, una volta note le sollecitazioni in testa, come azioni verticali e orizzontali, sono calcolati col metodo degli elementi finiti, assimilati a travi su suolo alla *Winkler*, per ricavare le sollecitazioni interne lungo il loro sviluppo. Anche in questo caso le verifiche di resistenza saranno effettuate in ottemperanza alle norme vigenti con il metodo degli stati limite e applicando le disposizioni relative ai minimi di armatura nei pali.



Geometria e carichi plinto diretto

Questo primo test viene svolto effettuando il calcolo manuale di un plinto diretto, di forma quadrata sul quale scarica un pilastro di sezione anch'essa quadrata. I risultati così ottenuti saranno confrontati con quelli forniti dai tabulati del *CDPWin*.



I dati utilizzati sono i seguenti:

Dimensione del pilastro:	B pil = 0,30 m
Dimensione del plinto in direzione X:	Bx = 2,50 m
Dimensione del plinto in direzione Y:	By = 2,50 m
Spessore della zattera:	H zatt = 0,60 m

Peso specifico del calcestruzzo armato:	$\gamma = 2,50 \text{ t/mc}$
---	--

Scarichi agenti alla base del pilastro:

Carico verticale di compressione:	N = 50 t
Momento flettente asse vettore X:	Mx = 0
Momento flettente asse vettore Y:	My = 30 t m
Taglio in direzione X:	Tx = 10 t
Taglio in direzione Y:	Ty = 0
Momento torcente asse vettore Z (antiorario):	Mz = 0

Dal momento che ci interessano le azioni alla base del plinto (superficie a contatto con il suolo) dobbiamo aggiornare tali scarichi sommando al carico verticale il peso della zattera e ai momenti flettenti la coppia data dalle azioni taglianti per un braccio pari allo spessore della zattera. Gli scarichi da utilizzare per il calcolo delle tensioni sul terreno saranno quindi i seguenti:

Carico verticale di compressione:	$N' = N + Bx \times By \times H \text{ zatt} \times \gamma = 59,375 \text{ t}$
Momento flettente asse vettore X:	$Mx' = 0$
Momento flettente asse vettore Y:	$My' = My + Tx \times H \text{ zatt} = 36,000 \text{ t m}$
Taglio in direzione X:	$Tx' = 10,000 \text{ t}$
Taglio in direzione Y:	$Ty' = 0$
Momento torcente asse vettore Z (antiorario):	$Mz' = 0$

Pressione del terreno

Sul plinto in questione si può calcolare l'eccentricità dell'azione verticale risultante, pari al rapporto tra il momento flettente My e il carico verticale:

$$\text{Eccentricità in direzione X} \rightarrow \mathbf{Ex = My' / N' = 0,606 \text{ m}}$$

Il centro di pressione quindi ricade all'esterno del nocciolo d'inerzia della base del plinto, in quanto inferiore al valore limite:

$$\text{Eccentricità limite (semilarghezza nocciolo)} \rightarrow E_{\text{lim}} = Bx / 6 = 0,416 \text{ m}$$

Ciò significa che la superficie reagente del plinto sarà parzializzata, rispetto alla sezione complessiva, e la distribuzione delle pressioni al piede sarà di forma triangolare. La dimensione **Bx** parzializzata quindi sarà la seguente:

$$\text{Larghezza parzializzata} \rightarrow Bx_{\text{eff}} = 3 \times (Bx / 2 - Ex) = 1,932 \text{ m}$$

La pressione massima quindi, al lembo più compresso della sezione reagente, sarà la seguente:

$$\text{Sigma massima} \rightarrow \text{Sig}_{\text{max}} = 2 \times N' / (Bx_{\text{eff}} \times By) = 24,586 \text{ t/mq}$$

Sollecitazioni taglianti sul plinto diretto

Per quanto riguarda le verifiche a taglio, si suppone che una ipotetica rottura del plinto a punzonamento dia luogo ad una superficie di rottura a forma tronco-conica, con la base superiore (di dimensione più piccola) coincidente con la sezione del pilastro e una inclinazione delle facce a 45 gradi, ad allargare verso il basso. Da ciò si è passati ad una superficie di calcolo semplificata circa equivalente, di forma prismatica, quindi con facce verticali e con una base che si discosta dalla sezione del pilastro di una distanza pari alla metà dello spessore della zattera.

Come detto il plinto va schematizzato, ai fini delle verifiche interne, come 4 mensole indipendenti incastrate al piede del pilastro. Tali 4 mensole quindi si individuano in questo caso tracciando in pianta delle linee a 45 gradi dalla sezione di rottura a taglio, sopra definita, fino ad incontrare il contorno del plinto, in questo caso agli spigoli. Nel caso in questione quindi si avrà a che fare, lungo le 4 direzioni, con 4 dei trapezi, nei quali può suddividersi il plinto tracciando le diagonali anzidette. Le dimensioni di ciascun trapezio sono le seguenti:

$$\text{Base maggiore: } B_{\text{max}} = By = 2,5 \text{ m}$$

$$\text{Base minore: } B_{\text{min}} = B_{\text{pil}} + H_{\text{zatt}} = 0,90 \text{ m}$$

$$\text{Altezza: } H_{\text{trap}} = (Bx - B_{\text{pil}} - H_{\text{zatt}}) / 2 = 0,80 \text{ m}$$

La tensione corrispondente alla base maggiore è pari a Sig_{max} , sopra calcolata. Quella corrispondente al lato corto, quindi alla sezione di attacco della mensola di calcolo per il taglio, noto che il diagramma delle pressioni è di forma triangolare, si ricava dalla seguente proporzione:

$$\text{Sig}_{\text{min}} = \text{Sig}_{\text{max}} - (\text{Sig}_{\text{max}} / Bx_{\text{eff}}) \times H_{\text{trap}} = 14,405 \text{ t/mq}$$

Bisogna infine tenere conto del fatto che la sezione in esame è sollecitata dalle pressioni del terreno, che agiscono dall'alto verso il basso, ma una parte di queste pressioni servono a contrastare l'azione distribuita dovuta al peso della zattera, che in realtà è una ulteriore azione, che in questo caso agisce verso il basso e compensa parzialmente l'azione tagliante calcolata con le sole pressioni del terreno. Per tenere conto di ciò si modificano i valori delle pressioni sottraendo ad esse il carico distribuito uniforme derivante dal peso proprio della zattera (peso proprio mensola di calcolo).

$$\text{Sig}'_{\text{min}} = \text{Sig}_{\text{min}} - \gamma \times 0,6 = 12,905 \text{ t/mq}$$

$$\text{Sig}'_{\text{max}} = \text{Sig}_{\text{max}} - \gamma \times 0,6 = 23,086 \text{ t/mq}$$

Per ottenere la sollecitazione tagliante complessiva alla sezione di incastro (lato corto) bisognerebbe integrare la tensione sulla superficie del trapezio **Sig(X)** per la larghezza della singola fibra **B(X)**, entrambe funzione dell'ascissa X, che si sviluppa lungo l'ipotetico asse della mensola in questione, a partire dalla sezione di incastro. Oppure, il che è lo stesso, calcolare il volume di un solido che ha come base la superficie della mensola e come altezza variabile il valore della pressione. Data la complessità del calcolo, si preferisce in questo test effettuare una semplificazione, ipotizzando una pressione uniforme pari al valore medio tra le pressioni minima e massima appena indicate. Questa approssimazione è a svantaggio di sicurezza, fornirà cioè un valore leggermente inferiore a quello teoricamente corretto.

Il software *CDPWin* applica invece la formulazione completa, più esatta ma meno gestibile come formulistica diretta, quindi il valore sarà leggermente discrepante nella direzione indicata. La presente approssimazione viene qui effettuata per una maggiore chiarezza della modalità di ottenimento del risultato.

$$\text{Sig med} = (\text{Sig}_{\max} + \text{Sig}_{\min}) / 2 = 17,995$$

Sviluppando si ha:

$$\text{Tpli} = \text{Sig med} \times ((\text{B max} + \text{B min}) \times \text{H trap}) / 2 = 24,473 \text{ t}$$

Dovremo aspettarci un risultato in *CDPWin* superiore a quello ottenuto con la presente semplificazione, in quanto la pressione di calcolo massima insiste su lato lungo del trapezio, quindi l'applicazione del valore medio sarà necessariamente riduttivo e non a vantaggio di sicurezza.

Naturalmente si è effettuato solo il calcolo delle mensola più sollecitata, che è quella relativa alla direzione della massima pressione sul terreno. Per le altre la sollecitazione tagliante è sicuramente minore, avendo pari geometria ma una pressione di contatto sicuramente inferiore. Peraltro la verifica a taglio della mensola più sollecitata è già comprensiva di una verifica a punzonamento, in quanto tiene conto anche dell'effetto peggiorativo, su alcune delle mensole, dell'azione flettente, mentre una verifica a punzonamento classica si effettua considerando il solo sforzo normale.

Sollecitazioni flettenti sul plinto diretto

Per quanto riguarda le verifiche a flessione, si suppone che la sezione critica a flessione per ciascuna mensola sia quella arretrata, rispetto al filo del pilastro, di un valore pari a 0,15 per la dimensione della sezione del pilastro stesso.

Anche in questo caso il plinto va schematizzato, ai fini delle verifiche interne, come 4 mensole indipendenti incastrate al piede del pilastro. Tali 4 mensole hanno stavolta una sezione in pianta rettangolare, con base pari alla larghezza del plinto. Le 4 mensole quindi parzialmente si sovrappongono.

Le dimensioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{Base:} & \quad \text{B mens} = \text{B}_y = 2,5 \text{ m} \\ \text{Altezza:} & \quad \text{H mens} = (\text{B}_x - \text{B pil}) / 2 + 0,15 \times \text{B pil} = 1,145 \text{ m} \end{aligned}$$

La tensione corrispondente alla base maggiore è pari a Sig_{\max} , sopra calcolata. Quella corrispondente alla sezione di incastro della mensola, in questo caso è la seguente:

$$\text{Sig}_{\min} = \text{Sig}_{\max} - (\text{Sig}_{\max} / \text{B}_x \text{ eff}) \times \text{H mens} = 10,890 \text{ t/mq}$$

Anche in questo caso per tenere conto di ciò si modificano i valori delle pressioni sottraendo ad esse il carico distribuito uniforme derivante dal peso proprio della zattera (peso proprio mensola di calcolo).

$$\begin{aligned} \text{Sig}'_{\min} &= \text{Sig}_{\min} - \gamma \times 0,6 = 9,390 \text{ t/mq} \\ \text{Sig}'_{\max} &= \text{Sig}_{\max} - \gamma \times 0,6 = 23,086 \text{ t/mq} \end{aligned}$$

Per ottenere la sollecitazione flettente alla sezione d'incastro si troverà la risultante di un solido delle pressioni di forma prismatica a base rettangolare (area di base della mensola per valore minimo della pressione) con risultante applicata a metà della lunghezza della mensola, a cui si sommerà la risultante di un solido sempre a base rettangolare, ma con altezza massima su un lato, pari alla differenza tra la pressione massima e quella minima, e pressione nulla sul lato opposto. Tale seconda risultante verrà applicata a 2/3 della lunghezza della mensola.

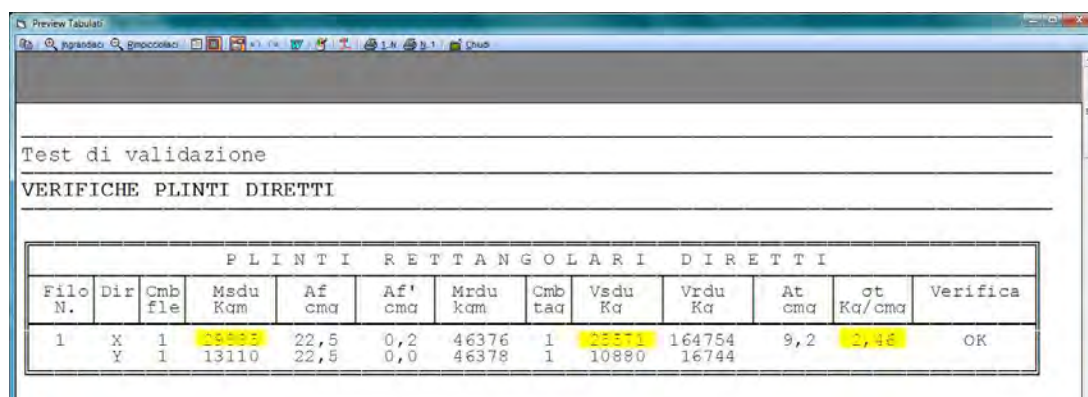
Sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} \text{Mpli} &= \text{B mens} \times \text{H mens} \times \text{Sig}_{\min} \times \text{H mens} / 2 + \\ &+ \text{B mens} \times \text{H mens} \times (\text{Sig}_{\max} - \text{Sig}_{\min}) / 2 \times \text{H mens} \times 2 / 3 = 30,351 \text{ t m} \end{aligned}$$

Naturalmente si è effettuato solo il calcolo delle mensola più sollecitata, che è quella relativa alla direzione della massima pressione sul terreno. Per le altre la sollecitazione flettente è sicuramente minore, avendo pari geometria ma una pressione di contatto sicuramente inferiore.

Comparazione dei risultati del plinto diretto

Riguardo al calcolo del plinto diretto il software *CDPWin* fornisce la seguente tabella di valori:



The screenshot shows a window titled 'Preview Tabulati' with a menu bar and a toolbar. Below the toolbar, there is a section titled 'Test di validazione' and 'VERIFICHE PLINTI DIRETTI'. A table titled 'PLINTI RETTANGOLARI DIRETTI' is displayed. The table has 13 columns: 'Filo N.', 'Dir', 'Cmb fle', 'Msdu Km', 'Af cmq', 'Af' cmq', 'Mrdu km', 'Cmb tag', 'Vsdu Kg', 'Vrdu Kg', 'At cmq', 'ot Kg/cmq', and 'Verifica'. The table contains two rows of data for 'Filo N. 1'. The first row has values: 'X', '1', '28485', '22,5', '0,2', '46376', '1', '25571', '164754', '9,2', '2,48', and 'OK'. The second row has values: 'Y', '1', '13110', '22,5', '0,0', '46378', '1', '10880', '16744', and the remaining cells are empty.

PLINTI RETTANGOLARI DIRETTI												
Filo N.	Dir	Cmb fle	Msdu Km	Af cmq	Af' cmq	Mrdu km	Cmb tag	Vsdu Kg	Vrdu Kg	At cmq	ot Kg/cmq	Verifica
1	X	1	28485	22,5	0,2	46376	1	25571	164754	9,2	2,48	OK
	Y	1	13110	22,5	0,0	46378	1	10880	16744			

Si evince da questo estratto dei tabulati di stampa forniti dal *CDPWin* quali sono i valori calcolati relativamente alla tensione massima sul terreno, il taglio (indicato con la sigla *Vsdu*) e il momento flettente (*Msdu*) più gravosi per la verifica del plinto. I valori di interesse per questo test sono quelli evidenziati in giallo.

Volendo riassumere i valori da confrontare, si ha:

*Pressione massima sul terreno: $\text{Sigmax} = 24,586 \text{ t/mq}$ – (*CDP Win* 24,6 t/mq) scarto: 0,0%*

*Sollecitazione tagliante massima: $\text{Tpli} = 24,473 \text{ t}$ – (*CDP Win* 25,571 t/mq) scarto: 4,2%*

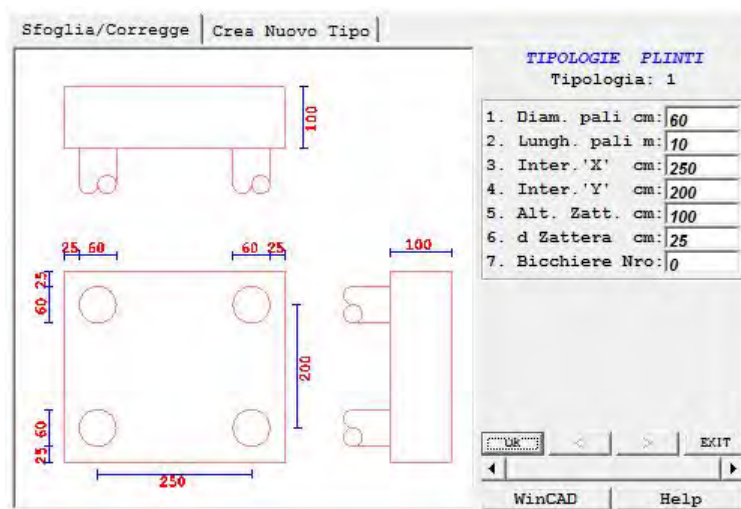
*Sollecitazione flettente massima: $\text{Mpli} = 30,351 \text{ t m}$ – (*CDP Win* 29,885 t/mq) scarto: 1,5%*

Lo scarto per la pressione del terreno è sostanzialmente nullo, dal momento che la differenza deriva dal fatto che in stampa il *CDPWin* fornisce un numero limitato di cifre decimali. Quello per la sollecitazione tagliante era atteso dalla semplificazione effettuata, così come era atteso che la differenza sarebbe stata nel senso di un valore maggiore fornito dal software, che applica la formulazione integrale completa. La scarsa entità della differenza comunque conforta ampiamente sulla correttezza del risultato fornito dal software. Infine lo scarto dell'azione flettente, sicuramente limitato, deriva da una minore precisione dei valori utilizzati per la calcolazione manuale, bloccata alla terza cifra decimale, mentre il software procede usando durante le elaborazioni una precisione molto maggiore, salvo poi troncare i decimali in tabulato per motivazioni di spazio. Tali piccole imprecisioni dei dati, ripetute successivamente, amplificano in maniera geometrica la differenza tra i risultati.

In conclusione quindi la procedura automatica di *CDPWin* risulta pienamente affidabile.

Geometria e carichi plinto su pali

Questo secondo test viene svolto effettuando il calcolo manuale di un plinto su pali, di forma rettangolare e così caricato e confrontando i risultati ottenuti con quelli forniti dai tabulati del *CDPWin*.



I dati utilizzati sono i seguenti:

Dimensione del plinto in direzione X:	Bx = 360 cm
Dimensione del plinto in direzione Y:	By = 310 cm
Spessore della zattera:	H zatt = 100 cm
Diametro dei pali:	D = 0,60 m
Lunghezza dei pali:	L = 10,00 m
Interasse pali direzione X:	lx = 2,50 m
Interasse pali direzione Y:	ly = 2,00 m

Peso specifico del calcestruzzo armato:	$\gamma = 2500 \text{ Kg/mc}$
---	---

Scarichi agenti alla base del pilastro:

Carico verticale di compressione:	N = 100 t
Momento flettente asse vettore X:	Mx = 20 t m
Momento flettente asse vettore Y:	My = 30 t m
Taglio in direzione X:	Tx = 25 t
Taglio in direzione Y:	Ty = 15 t
Momento torcente asse vettore Z (antiorario):	Mz = 10 t m

Dal momento che ci interessano le azioni alla base del plinto (superficie a contatto con la testa dei pali) dobbiamo aggiornare tali scarichi sommando al carico verticale il peso della zattera e ai momenti flettenti la coppia data dalle azioni taglianti per un braccio pari allo spessore della zattera. Gli scarichi da utilizzare per il calcolo saranno quindi i seguenti:

Carico verticale di compressione:	$N' = N + Bx \times By \times H \text{ zatt} \times \gamma = 127,900 \text{ t}$
Momento flettente asse vettore X:	$Mx' = Mx - Ty \times H \text{ zatt} = 5 \text{ t m}$
Momento flettente asse vettore Y:	$My' = My + Tx \times H \text{ zatt} = 55 \text{ t m}$
Taglio in direzione X:	$Tx' = Tx = 25 \text{ t}$
Taglio in direzione Y:	$Ty' = Ty = 15 \text{ t}$
Momento torcente asse vettore Z (antiorario):	$Mz' = Mz = 10 \text{ t m}$

Scarichi in testa ai pali

Lo sforzo normale agente in testa ai pali va calcolato sommando l'effetto dello scarico verticale e quello delle azioni flettenti. In virtù della rigidità ipotizzata per il plinto, lo scarico verticale complessivo si ripartisce in maniera uniforme su tutti i pali. L'effetto dei momenti flettenti, in ciascuna direzione, si traduce in una coppia aggiuntiva di sforzi sui pali (uno a trazione e l'altro a compressione) che bilanciano il momento flettente applicato al plinto. Ciò si traduce, per il palo più sollecitato a compressione (quello in basso a destra nel caso in esame), nella semplice formulazione seguente:

$$N_{\text{palo max}} = N' / 4 + Mx' / ly / 2 + My' / lx / 2 = 44,225 \text{ t}$$

Analogamente si può calcolare lo sforzo normale del palo meno sollecitato:

$$N_{\text{palo min}} = N' / 4 - Mx' / ly / 2 - My' / lx / 2 = 19,725 \text{ t}$$

Per quanto riguarda l'azione tagliante, il taglio in direzione X e in direzione Y si distribuisce in maniera uniforme sui 4 pali. Il momento torcente invece dà luogo a delle azioni taglianti tali da creare un momento torcente di verso opposto. L'azione tagliante derivante dal momento torcente su ciascun palo, avrà una direzione ortogonale alla linea congiungente il baricentro del palo con il baricentro della sezione del pilastro e una intensità pari alla coppia torcente divisa per il braccio, cioè la distanza tra palo e pilastro, il tutto diviso per 4 che è il numero dei pali. L'angolo formato, rispetto all'orizzontale (direzione X in pianta), della linea congiungente il pilastro con il palo più sollecitato è il seguente:

$$\alpha = \arctan((ly / 2) / (lx / 2)) = 38,66^\circ$$

La distanza tra palo e pilastro, braccio della coppia interna, è la seguente:

$$\text{dist} = \text{radice}((lx / 2)^2 + (ly / 2)^2) = 1,600 \text{ m}$$

Si possono quindi ricavare le sollecitazioni taglianti sul palo più sollecitato in tal senso (quello in basso a destra di cui si è appena calcolato l'angolo, che questo caso coincide con quello su cui agisce lo sforzo normale maggiore):

$$\begin{aligned} T_{\text{palo torc}} &= Mz' / 4 / \text{dist} = 1,5625 \text{ t} \\ T_{\text{palo x}} &= Tx' / 4 + T_{\text{palo torc}} \times \sin(\alpha) = 7,2260 \text{ t} \\ T_{\text{palo y}} &= Ty' / 4 + T_{\text{palo torc}} \times \cos(\alpha) = 4,9701 \text{ t} \end{aligned}$$

Complessivamente sul palo più sollecitato a taglio si ha la seguente sollecitazione risultante:

$$T_{\text{palo max}} = (T_{\text{palo x}}^2 + T_{\text{palo y}}^2)^{0.5} = 8,770 \text{ t}$$

Sollecitazioni taglianti sul plinto su pali

Si ripete quanto già indicato relativamente al plinto diretto. Per quanto riguarda le verifiche a taglio, si suppone anche in questo caso che una ipotetica rottura del plinto a punzonamento dia luogo ad una superficie di rottura a forma tronco-conica, con la base superiore (di dimensione più piccola) coincidente con la sezione del pilastro e una inclinazione delle facce a 45 gradi, ad allargare verso il basso. Da ciò si passa ad una superficie di calcolo di forma prismatica, quindi con facce verticali e con una base che si discosta dalla sezione del pilastro di una distanza pari alla metà dello spessore della zattera.

Come detto il plinto va schematizzato, ai fini delle verifiche interne, come 4 mensole indipendenti incastrate al piede del pilastro. Tali 4 mensole quindi si individuano in questo caso tracciando in pianta delle linee a 45 gradi dalla sezione di rottura a taglio, sopra definita, fino ad incontrare il contorno del plinto. Nel caso in questione quindi si avrà a che fare, lungo le 4 direzioni, con porzioni, nelle quali può suddividersi il plinto tracciando le diagonali anzidette.

In questo caso, a differenza del plinto diretto, ciò che interessa della forma delle varie mensole, a parte il calcolo del loro peso proprio, è solo sapere se comprendono o meno i pali al loro interno. Nel caso in questione, la mensola in condizioni di carico più gravose è sicuramente quella in direzione X positiva, sulla quale ricadono due pali e in condizioni di sforzo verticale maggiore di quelli omologhi nella direzione X negativa.

Lo sforzo normale medio nei due pali relativi alla mensola in esame (pali a destra) va calcolato in assenza del contributo di M_x' . Si ha quindi:

$$N_{palo\ med} = N' / 4 + M_y' / l_x / 2 = 127,900 / 4 + 55 / 2,5 / 2 = 42,975\ t$$

Bisogna però sottrarre a questo valore il peso proprio della zattera, relativo alla mensola in questione, che ha segno opposto. Si semplifica la forma della mensola come fosse trapezia, anche se la forma reale è leggermente diversa, quindi leggermente più pesante, ma in modo trascurabile per questi scopi.

Base maggiore:	$B_{max} = B_y = 3,1\ m$
Base minore:	$B_{min} = B_{pil} + H_{zatt} = 1,30\ m$
Altezza:	$H_{trap} = (B_x - B_{pil} - H_{zatt}) / 2 = 1,15\ m$

$$P_{zatt} = \gamma \times H_{zatt} \times (B_{max} + B_{min}) \times H_{trap} / 2 = 6,325$$

L'azione tagliante complessiva sulla mensola in direzione X è quindi la seguente:

$$T_{pli} = N_{palo\ med} \times 2 - P_{zatt} = 79,625\ t$$

Sollecitazioni flettenti sul plinto su pali

Per quanto riguarda le verifiche a flessione, anche in questo caso si suppone che la sezione critica a flessione per ciascuna mensola sia quella arretrata, rispetto al filo del pilastro, di un valore pari a 0,15 per la dimensione della sezione del pilastro stesso.

Anche in questo caso il plinto va schematizzato, ai fini delle verifiche interne, come 4 mensole indipendenti incastrate al piede del pilastro. Tali 4 mensole hanno stavolta una sezione in pianta rettangolare, con base pari alla larghezza del plinto. Le 4 mensole quindi parzialmente si sovrappongono. Le dimensioni sono le seguenti:

Base:	$B_{mens} = B_y = 3,1\ m$
Altezza:	$H_{mens} = (B_x - B_{pil}) / 2 + 0,15 \times B_{pil} = 1,695\ m$

$$P_{zatt} = \gamma \times H_{zatt} \times B_{mens} \times H_{mens} = 13,136$$

Il calcolo della sollecitazione tagliante è molto simile a quella dell'azione tagliante, con la differenza che alle azioni dei pali va aggiunta la distanza del baricentro dei pali dalla sezione di attacco della mensola, così come la risultante del peso proprio della zattera, di segno opposto.

$$T_{pli} = N_{palo\ med} \times 2 \times (l_x / 2 - 0,35 \times B_{pil}) - P_{zatt} \times H_{mens} / 2 = 87,280\ t$$

Comparazione dei risultati del plinto su pali

Riguardo al calcolo del plinto su pali il software *CDPWin* fornisce le seguenti tabelle di valori:

Test di validazione

SOLLECITAZIONI PALI

SOLLECITAZIONI PALO										
Combinazione di calcolo Tab. A1 N.1										
Plinto N.	Fila N.	Sez. N.	Dist. cm	Kwin Ka/cmc	N Ka	M Kam	T Ka	Sbost. mm	Press. Ka/cmc	
2	1	1	100	2,2	44225	-11933	8770	-1,59	-0,4	
		2	200	2,2	44122	-4203	6746	-1,35	-0,3	
		3	300	4,6	42399	871	3625	-0,88	-0,4	
		4	400	7,0	39057	2970	883	-0,44	-0,3	
		5	500	9,4	34095	2926	-692	-0,14	-0,1	
		6	600	11,8	27514	1930	-1129	0,00	0,0	
		7	700	14,2	19313	891	-889	0,04	0,1	
		8	800	16,6	9492	224	-453	0,04	0,1	
		9	900	19,0	0	-39	-107	0,02	0,0	
		10	1000	22,6	0	-45	56	0,00	0,0	
		11	1100	22,6	0	0	0	-0,01	0,0	
2	2	1	100	2,2	19725	-11933	8770	-1,59	-0,4	
		2	200	2,2	19622	-4203	6746	-1,35	-0,3	
		3	300	4,6	17899	871	3625	-0,88	-0,4	
		4	400	7,0	14557	2970	883	-0,44	-0,3	
		5	500	9,4	9595	2926	-692	-0,14	-0,1	
		6	600	11,8	3014	1930	-1129	0,00	0,0	

Test di validazione

VERIFICHE RETT. SU PALI

PLINTI RETTANGOLARI SU PALI											
Filo N.	Dir	Cmb fle	Msdv Kam	Af cma	Af' cma	Mrdv kam	Cmb tag	Vsdv Ka	Vrdv Ka	At cma	Verifica
2	X	1	87280	46,5	0,0	165631	1	79063	377195	28,6	OK
	Y	1	50077	54,0	0,0	200948					

Si evince da questo estratto dei tabulati di stampa forniti dal *CDPWin* quali sono i valori calcolati relativamente allo sforzo normale massimo e minimo e il taglio in testa al palo più sollecitato in tal senso, nonché il taglio (indicato con la sigla *Vsdv*) e il momento flettente (*Msdv*) più gravosi per la verifica del plinto. I valori di interesse per questo test sono quelli evidenziati in giallo.

Volendo riassumere i valori da confrontare, si ha:

Sforzo normale massimo sul palo:	<i>N</i>_{palo max} = 44,225 t – (<i>CDP Win</i> 44,225 t)	scarto: 0%
Sforzo normale minimo sul palo:	<i>N</i>_{palo min} = 19,725 t – (<i>CDP Win</i> 19,725 t)	scarto: 0%
Taglio massimo sul palo:	<i>T</i>_{palo max} = 8,770 t – (<i>CDP Win</i> 8,770 t)	scarto: 0%
Sollecitazione tagliente massima plinto:	<i>T</i>_{pli} = 79,625 t – (<i>CDP Win</i> 79,063 t)	scarto: 0,7%
Sollecitazione flettente massima plinto:	<i>M</i>_{pli} = 87,280 t m – (<i>CDP Win</i> 87,280 t m)	scarto: 0%

Gli scarti tra i valori sono tutti nulli, ad eccezione di una piccola discrepanza relativa alla sollecitazione tagliente del plinto, discrepanza prevista nell'elaborazione precedente a causa di una semplificazione che si è adottata, mentre il software effettua il calcolo con la procedura esatta.

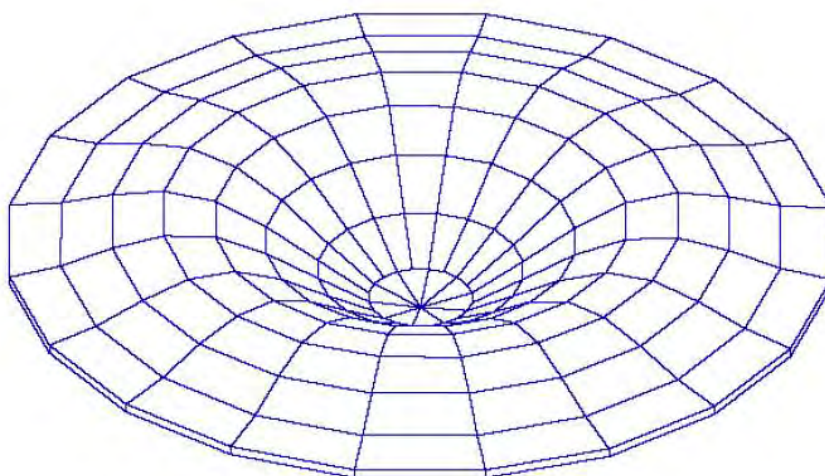
In conclusione quindi la procedura automatica di *CDPWin* risulta pienamente affidabile.

CDS Win - Computer Design of Structures

CDS Win – CDMa Win

Release 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 e 2023

Validazione del codice di calcolo



Software
Tecnico
Scientifico S.r.l.

Indice

Analisi Statica Lineare

Test di verifica n° 1: Trave piana isostaticamente vincolata
Test di verifica n° 2: Ginocchiera soggetta a carico concentrato
Test di verifica n° 3: Trave piana con estremi incastrati
Test di verifica n° 4: Sistema piano di aste sospese (1)
Test di verifica n° 5: Stato tensionale di una trave inflessa
Test di verifica n° 6: Stato tensionale di una trave inflessa
Test di verifica n° 7: Sistema piano di aste sospese (2)
Test di verifica n° 8: Sistema piano di aste sospese (3)
Test di verifica n° 9: Telaio piano
Test di verifica n°10: Travatura reticolare piana
Test di verifica n°11: Pipe-line soggetta a carico termico
Test di verifica n°12: Trave a mensola soggetta all'azione di un momento torcente concentrato
Test di verifica n°13: Trave a mensola a sezione
Test di verifica n°14: Lastra rettangolare piana
Test di verifica n°15: Flessione in una piastra circolare utilizzando elementi assialsimmetrici
Test di verifica n°16: La piastra rettangolare incastrata al contorno e soggetta ad un carico uniformemente ripartito

Analisi Statica: Non Linearità Geometrica

Test di verifica n°17: Carico critico di una trave piana

Analisi dinamica modale

Test di verifica n°18: Frequenze naturali di vibrazione in una trave appoggiata- appoggiata
Test di verifica n°19: Frequenze naturali di vibrazione in una trave a mensola
Test di verifica n°20: Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore semplice
Test di verifica n°21: Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore con due masse in serie
Test di verifica n°22: Analisi in frequenza di una piastra rettangolare
Test di verifica n°23: Analisi in frequenza di una piastra sottile romboidale

Analisi statica non lineare Push Over

Test di verifica n°24: Elemento mensola a sezione costante
Test di verifica n°25: Telaio piano
Test di verifica n°26: Edificio regolare

Verifiche agli S.L.E. e calcolo delle sollecitazioni resistenti per sezioni in c.a.

Test di verifica n°27: a) Verifica allo Stato Limite di Esercizio di fessurazione
 b) Determinazione del momento e del taglio resistenti per una sezione in c.a.

Verifiche murature (CDMa Win)

Test di verifica n°28: Analisi sismica lineare e non lineare (push over) di una facciata in muratura

Rinforzi FRP

Test di verifica n°29: Test pratico di validazione numerica per la progettazione dei rinforzi in FRP

Taglio ciclico

Test di verifica n°30: Resistenza a taglio in condizioni cicliche per travi e pilastri

Appendice A
Bibliografia

Introduzione

Il presente lavoro contiene un insieme di test il cui obiettivo è quello di verificare l'affidabilità e l'applicabilità del solutore agli elementi finiti utilizzato dal programma **CDSWin**.

Il metodo degli elementi finiti rappresenta un argomento teorico molto vasto, sicuramente complesso, e gli esempi riportati, pur non avendo la pretesa di chiarire tale procedimento, rappresentano la più comune e basilare applicazione di questo metodo.

Al fine di raggiungere l'obiettivo di verifica posto, gli esempi riportati nelle pagine seguenti abbracciano differenti analisi di calcolo, parecchi elementi, diverse mesh e/o condizioni al contorno e provenendo da autorevoli testi ingegneristici, fanno riferimento a problemi la cui soluzione teorica, essendo nota, può essere confrontata con quella fornita dal programma al termine dell'elaborazione.

Si osservi, inoltre, che i problemi analizzati nella maggior parte dei test sono stati estratti da testi anglosassoni che, ovviamente, utilizzano unità di misura diverse da quelle metriche. Pertanto, per poter convertire le varie grandezze dal sistema anglosassone a quello metrico, si è reso necessario il ricorso a fattori di conversione, che approssimando tra loro i valori delle varie grandezze, ne consentono il passaggio da un sistema all'altro.

Quindi, per ciascuno dei test eseguiti è possibile affermare che il lieve scostamento esistente tra il risultato finale fornito dall'elaborazione e quello teorico è imputabile proprio alle conversioni effettuate.

Per ogni test svolto viene citata la specifica fonte del riferimento e vengono forniti tutti i dati necessari per riprodurre i risultati ottenuti.

Test di verifica n°1

Trave piana isostaticamente vincolata

Fonte di riferimento: A&C- Rif.[1]: Analisi e calcolo n° 5, Apr.-Giu. 2001

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una trave a sezione rettangolare è isostaticamente vincolata ed è soggetta all'azione di un carico assiale concentrato P in corrispondenza del nodo n° 2.

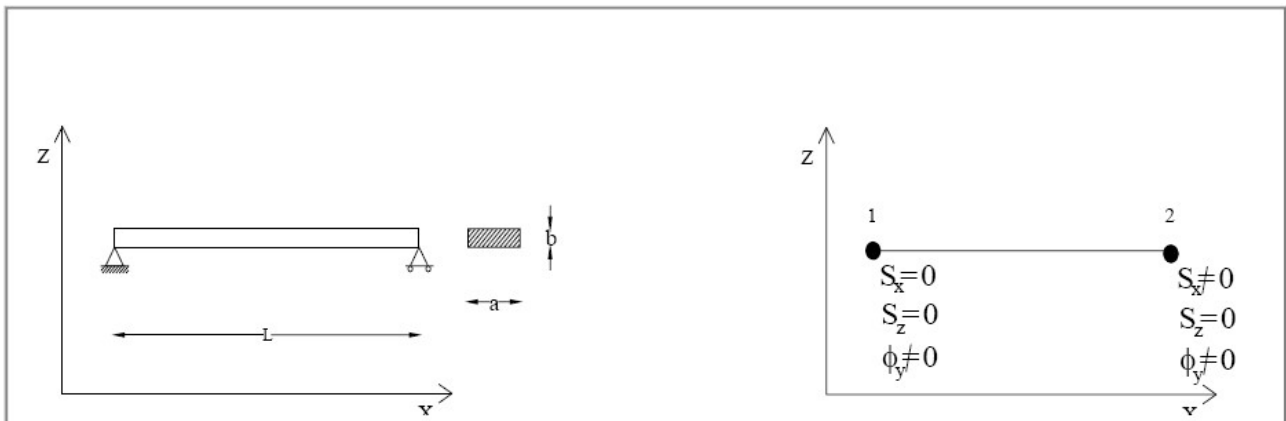


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Modello di calcolo: Ai fini dell'analisi è sufficiente modellare il sistema come unico elemento monodimensionale. I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E=2000000 \text{ Kg/cm}^2$	Larghezza, $a=20 \text{ mm}$
	Altezza, $b=5 \text{ mm}$

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste l'analisi si propone di illustrare:

- La linearità della relazione carico-deformazione;
- L'effetto del carico applicato eliminando gradi di libertà al sistema;
- L'analisi delle deformazioni libere;

e quindi di verificare il comportamento dell'elemento asta sotto l'azione del carico P confrontando la soluzione teorica con quella fornita dall'analisi di **CDSWin**.

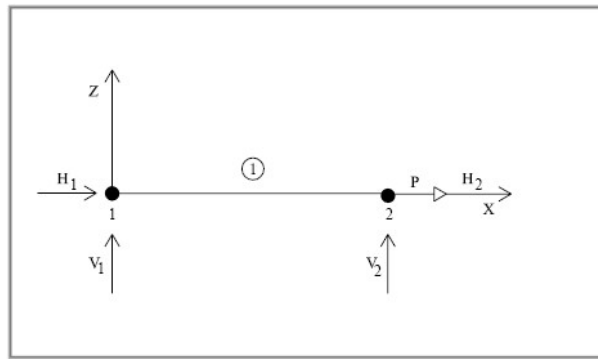


Fig. 3: Rappresentazione dello schema di calcolo

Caso 1:

Con le condizioni al contorno descritte in fig. 1 eseguire il calcolo applicando il carico $P = 0.1$ t in corrispondenza del nodo n°2 in direzione x.

La soluzione teorica, per il sistema descritto, prevede un unico spostamento assiale non nullo sul nodo n° 2 ed un valore della forza di reazione H1 pari al valore del carico P applicato.

Tutte le altre reazioni vincolari devono risultare nulle.

$$H1 = P$$

$$V1 = 0 \quad V2 = 0$$

Spostamenti u_x (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0.005	0.005	1.000

Spostamenti v_z (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Rati (*)
	v_z	v_z	v_z
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Reazioni vincolari**H (tonn.)**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	-0.10	-0.10	1.000
2	0	0	1.000

V (tonn.)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Caso 2:

Eeguire il calcolo applicando il carico $P = 0.2 \text{ t}$ in corrispondenza del nodo n°2 in direzione x.

La soluzione prevede per uno carico doppio uno spostamento assiale doppio in corrispondenza del punto di applicazione del carico (nodo n° 2).

Questo garantisce la linearità del comportamento del sistema analizzato.

Spostamenti u_x (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0.01	0.01	1.000

Spostamenti v_z (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Reazioni vincolari**H (tonn.)**

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
	H	H	H
1	-0.20	-0.20	1.000
2	0	0	1.000

V (tonn.)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Caso 3:

Eeguire il calcolo come descritto nel caso 1, ma bloccando anche la traslazione orizzontale del nodo n°2.

La soluzione teorica, in questo caso, prevede per lo spostamento assiale del nodo n° 2 un valore nullo.

Spostamenti u_x (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Spostamenti v_z (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Caso 4:

Eseguire il calcolo come descritto nel caso 1, ma applicando nel nodo n°2 il carico P in direzione z. Se è soppresso il grado di libertà in z, nel nodo, anche in questo caso non deve verificarsi alcuna traslazione in z.

Spostamenti u_x (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Spostamenti v_z (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Caso 5:

Utilizzando le condizioni al contorno del caso 1 imporre in corrispondenza del nodo n° 2 uno spostamento assiale di entità pari a quella generata dall'applicazione del carico $P = 0.1 \text{ t}$:

$$\eta = 0.005 \text{ mm}$$

In questo caso il risultato dell'analisi deve produrre nel nodo n°2 l'insorgere di una forza pari a $P = 0.1 \text{ t}$. Ciò evidenzia, per il nodo, la presenza di una relazione di equivalenza tra forze e spostamenti.

Spostamenti u_x (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0.005	0.005	1.000

Spostamenti v_z (mm)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Reazioni vincolari **H (tonn.)**

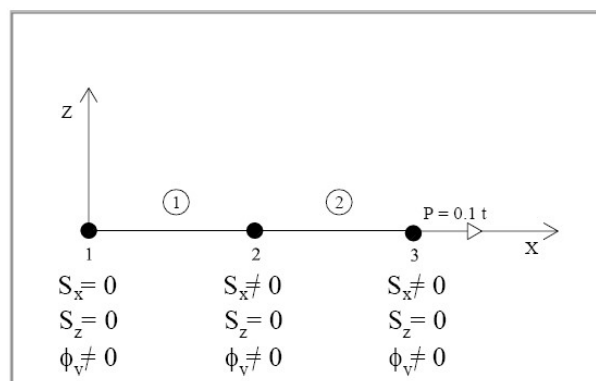
Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	-0.10	-0.10	1.000
2	-0.10	-0.10	1.000

 V (tonn.)

Nodi	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(*)
1	0	0	1.000
2	0	0	1.000

Caso 6:

Suddividere, mediante l'inserimento di un nodo nel punto mediano, l'asta del sistema descritto in due elementi e con le condizioni al contorno definite nel caso 1 analizzarne il comportamento.



L'analisi eseguita con **CDSWin** produce gli stessi effetti già esaminati nel caso 1.

(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°2

Ginocchiera soggetta a carico concentrato

Fonte di riferimento: A&C- Rif.[2]: Analisi e calcolo n° 6, Lug.-Set. 2001

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Dato il modello di calcolo in fig. 1, costituito da due aste di sezione rettangolare, applicare un carico $P=0,1$ t e determinare i valori degli spostamenti del nodo 2 in relazione al condizionamento che si genera a seguito della variazione dell'angolo α .

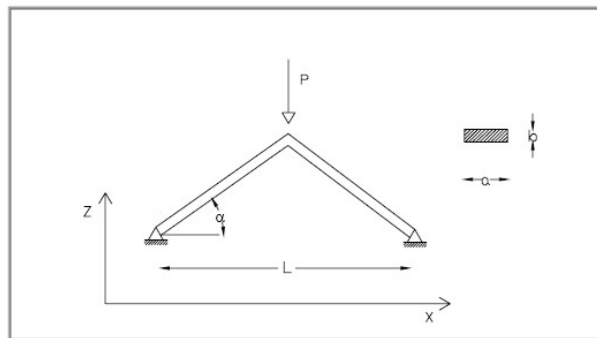


Fig. 1: Schema del problema

Modello di calcolo: Ai fini dell'analisi è sufficiente modellare il sistema come unione di due elementi monodimensionali. I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati e del punto d'applicazione del carico P.

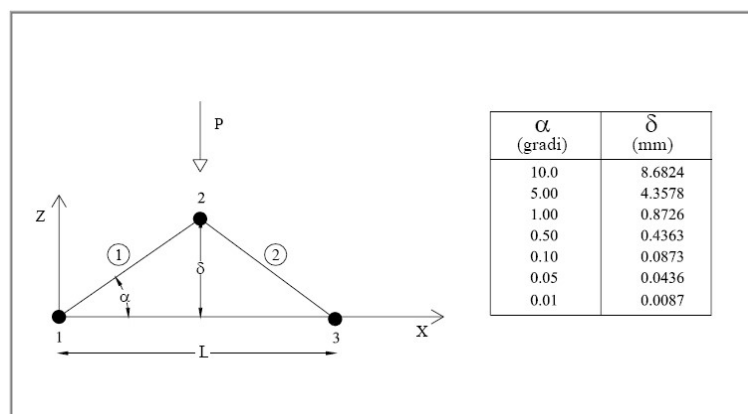


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
	Larghezza, $a=20$ mm
$E=2000000$ Kg/cm ²	Altezza, $b=5$ mm
	Lunghezza, $L=10$ cm

Obiettivo: L'analisi si propone di investigare l'esistenza di eventuali mal-condizionamenti della matrice di rigidità del sistema, e quindi di verificare il comportamento dell'elemento asta sotto l'azione del carico P.

Caso 1:

Per il nodo n° 2 della struttura riportata in Fig. 1 e con le condizioni al contorno descritte, al variare dell'inclinazione dell'angolo α , si sono ottenuti i seguenti valori di spostamento:

Spostamenti v_z (mm)

α (gradi)	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
10.0	- 0.043343	- 0.043	0.992
5.00	- 0.166435	- 0.166	0.997
1.00	- 4.10599	- 4.106	1.000
0.50	-16.4183	- 16.418	0.999
0.10	- 410.037	- 410.037	1.000
0.05	- 1643.91	- 1643.908	1.000
0.01	- 41286.8	- 41286.832	1.000

Caso 2:

Nel caso in cui la struttura venga modellata con un solo elemento, eseguire nuovamente il calcolo e valutare i risultati.

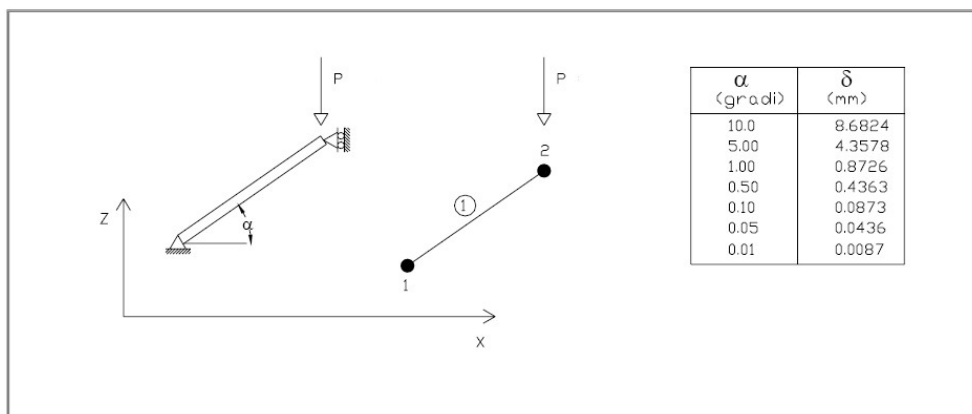


Fig. 3: Schema del problema

Spostamenti v_z (mm)

α (gradi)	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
10.0	- 0.043343	-0.043	0.992
5.00	- 0.166435	-0.166	0.997
1.00	- 4.10599	-4.106	1.000
0.50	-16.4183	-16.418	0.999
0.10	- 410.037	-410.037	1.000
0.05	- 1643.91	-1643.908	1.000
0.01	- 41286.8	-41286.832	1.000

(*): per Ratio si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°3

Trave piana con estremi incastrati

Fonte di riferimento: Timoshenko, Rif. [4]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 26, problem 10

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Asta di sezione prismatica incastrata agli estremi e soggetta, in corrispondenza di due sezioni intermedie, all'azione delle forze assiali F_1 e F_2 .

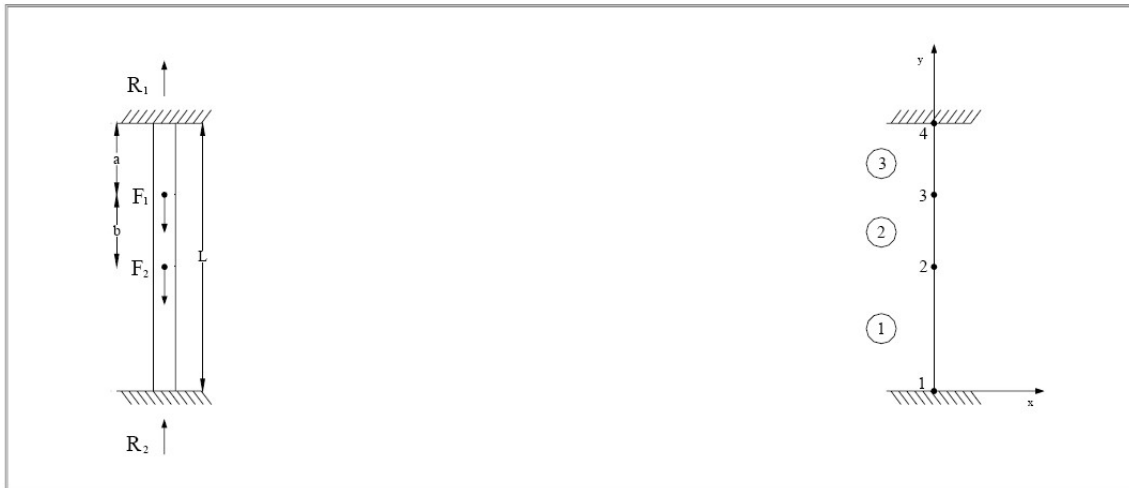


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste determinare le reazioni vincolari R_1 e R_2 .

Modello di calcolo: I nodi vengono inseriti in corrispondenza degli estremi vincolati e di ciascuno dei due punti di applicazione delle forze F_1 e F_2 .

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L=10 \text{ in}= 25.4 \text{ cm}$	
$E=30 \times 10^6 \text{ psi}=2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$a= b=0.3L=7.62 \text{ cm}$	$F_1=2F_2=1000 \text{ lb}=0.454 \text{ t}$
	$A=100 \text{ cm}^2$	

Soluzione teorica: La soluzione teorica fornisce:

$$R_1 = 900.0 \text{ lb} = 408.23 \text{ Kg}$$

$$R_2 = 600.0 \text{ lb} = 272.15 \text{ Kg}$$

Analisi dei risultati (*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$R_1 = 408.23 \text{ Kg}$	408 Kg	0.999
$R_2 = 272.15 \text{ Kg}$	272 Kg	0.999

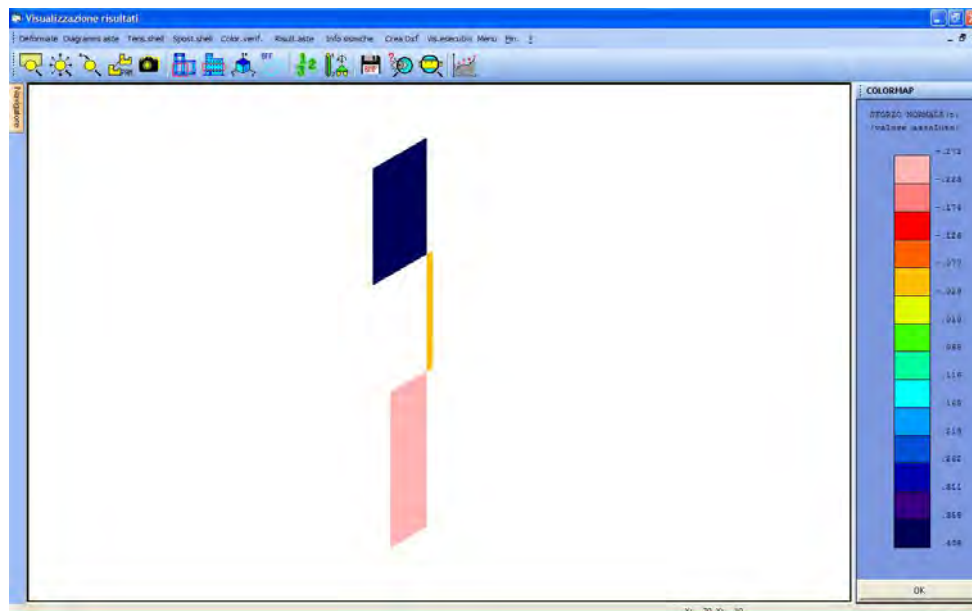


Fig. 3: Colormap sforzo normale

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°4

Sistema piano di aste sospese (1)

Fonte di riferimento: Timoshenko, Rif. [4]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 10, problem 2

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: La struttura in fig. 1 è costituita da due aste d'acciaio uguali, ciascuna di lunghezza L e sezione trasversale di area A . Tutti gli estremi delle due aste sono incernierati e la struttura viene sottoposta all'azione di un carico concentrato F .

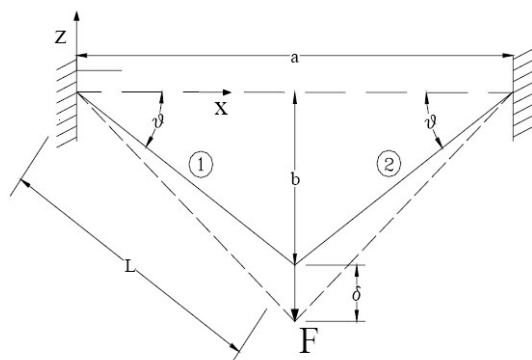


Fig. 1: Schema del problema

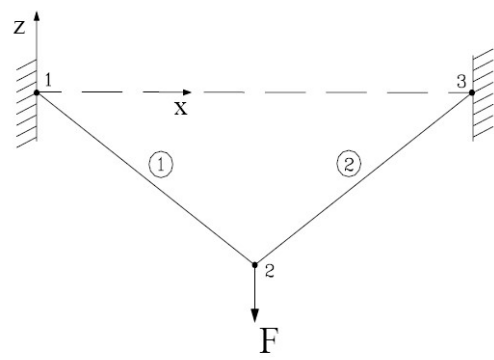


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste, perché trascurabile rispetto al carico F , determinare sia il valore della tensione σ in ciascuna delle aste, sia il valore dell'abbassamento δ del nodo 2.

Modello di calcolo: Le dimensioni a e b sono calcolate parametricamente utilizzando le relazioni:

$$a = 2L \cos \theta; \quad b = L \sin \theta$$

Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L = 15 \text{ ft} = 457.20 \text{ cm}$	
$E_{\text{acciaio}} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$A = 0.5 \text{ in}^2 = 3.23 \text{ cm}^2$	$F = 5000 \text{ lb} = 2.267 \text{ t}$
	$\Theta = 30^\circ$	

Soluzione teorica: Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$\sigma = 10000 \text{ psi} = 703 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta = 0.120 \text{ in} = 3.048 \text{ mm}$$

Analisi dei risultati (*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$\sigma = 703 \text{ kg/cm}^2$	$N/A = 2270/3.23 = 702.8 \text{ kg/cm}^2$	0.999
$\delta = 3.048 \text{ mm}$	3.043 mm	0.998

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

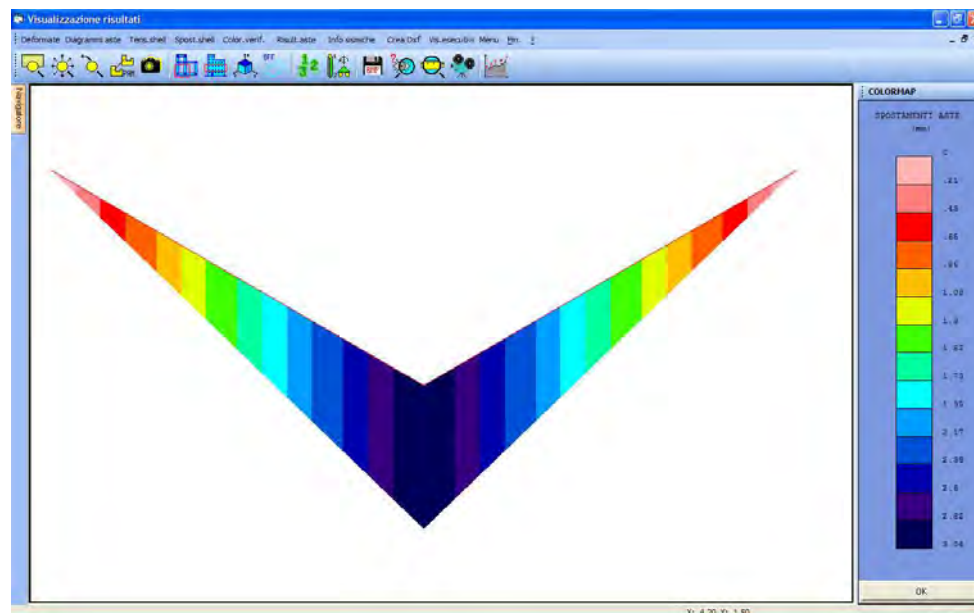


Fig. 4: Colormap deformazioni

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°5

Stato tensionale di una trave inflessa

Fonte di riferimento: Timoshenko, Rif. [4]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 98, Pb. 4

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una trave a doppio T, con sezione trasversale di area A , è isostaticamente vincolata mediante due vincoli semplici, come mostrato in fig. 1. Il sistema così descritto viene sottoposto, in corrispondenza delle estremità a sbalzo, all'azione di due carichi uniformemente distribuiti di intensità w .

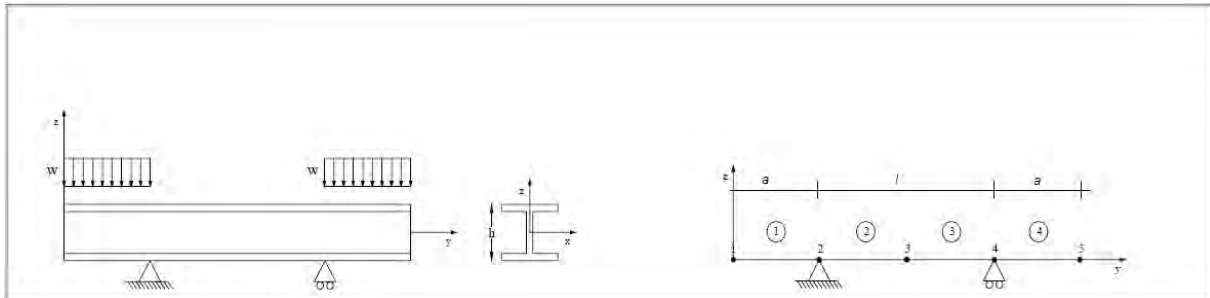


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso dell'asta, perché irrilevante rispetto alle forze in gioco, determinare sia il valore della tensione σ_{MAX} , sia il valore dell'abbassamento δ in corrispondenza della mezzeria (nodo 3).

Modello di calcolo: Per la modellazione della struttura assegnata è sufficiente inserire 5 nodi e suddividere, quindi, l'asta in 4 elementi.

Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$l = 240 \text{ in} = 609.6 \text{ cm}$	
	$a = 120 \text{ in} = 304.8 \text{ cm}$	
$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$h = 30 \text{ in} = 76.2 \text{ cm}$	$w = 10000 \text{ lb/ft} = 14.88 \text{ t/m}$
	$A = 50.65 \text{ in}^2 = 326.77 \text{ cm}^2$	
	$I_z = 7892 \text{ in}^4 = 328489.8 \text{ cm}^4$	
	$W_z = I_z / (h/2) = 8621.7 \text{ cm}^3$	

Soluzione teorica: Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$\sigma = 11400 \text{ psi} = 802 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta = 0.182 \text{ in} = 4.623 \text{ mm}$$

Analisi dei risultati ^(*):

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(**)
$\sigma = 802 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma = M/W_{el} = 6912000/8621.7 = 801.7 \text{ kg/cm}^2$	1.000
$\delta = 4.623 \text{ mm}$	4.634 mm	1.002

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

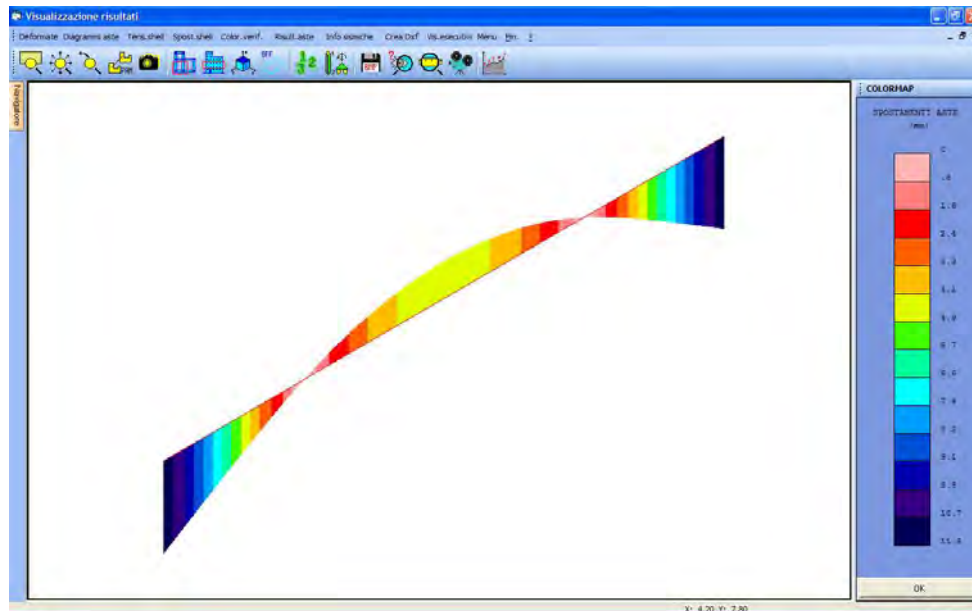


Fig. 3: Colormap deformazioni

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°6

Stato tensionale di una trave inflessa

Fonte di riferimento: Cremonese, Rif. [10]: Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. I pag. 82 e succ.

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: La struttura mostrata in fig. 1 consiste in una trave di sezione circolare, incastrata in corrispondenza del primo estremo e vincolata mediante un carrello in corrispondenza del secondo. La trave descritta è soggetta all'azione di un carico q uniformemente distribuito per tutta la sua lunghezza.

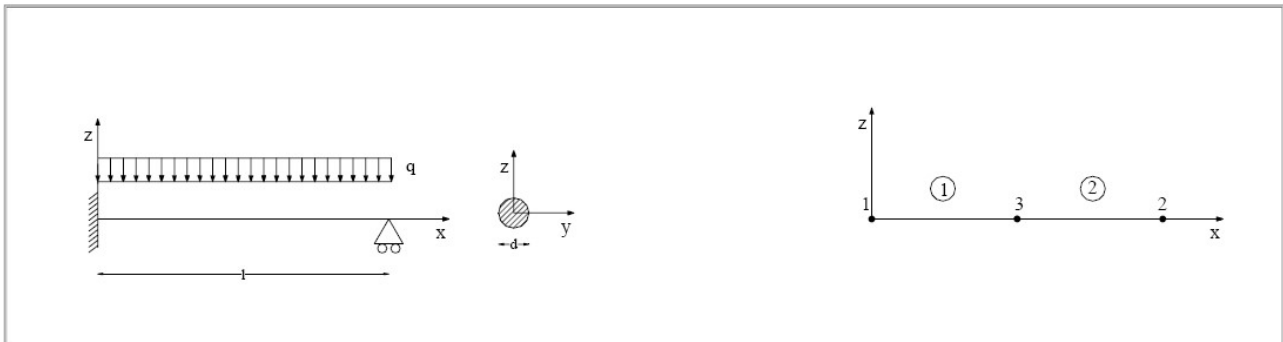


Fig. 1: Schema del problema

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso dell'asta, perché irrilevante rispetto alle forze in gioco, determinare il valore del momento flettente M_A in corrispondenza dell'incastro e la reazione del carrello V_B .

Modello di calcolo: Per la modellazione della struttura assegnata è sufficiente inserire 3 nodi e suddividere, quindi, l'asta in 2 elementi.

Caratteristiche meccanico-geometriche

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E=30 \times 10^6 \text{ psi}=2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$d=1.5 \text{ in}=3.81 \text{ cm}$	$q=100 \text{ pd/in}=1.784 \text{ t/m}$
	$l=20 \text{ in}=50.8 \text{ cm}$	

Soluzione teorica: Nel nostro caso, la soluzione teorica fornisce:

$$V_B = \frac{3}{8} q l = 750 \text{ pd} = 340.19 \text{ Kg};$$

$$M(z) = \frac{q l^2}{8} \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^2}{l^2} \right); \quad \text{da cui si ottiene:} \quad M_A = 5000 \text{ in pd} = 0.058 \text{ tm}$$

Analisi dei risultati ^(*):

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(**)
$V_B = 340.19 \text{ kg}$	340 kg	1.000
$M_A = 0.058 \text{ tm}$	0.058 tm	1.000

Si osserva, anche in questo caso un'ottima conformità tra il risultato di output del programma e quello teorico.

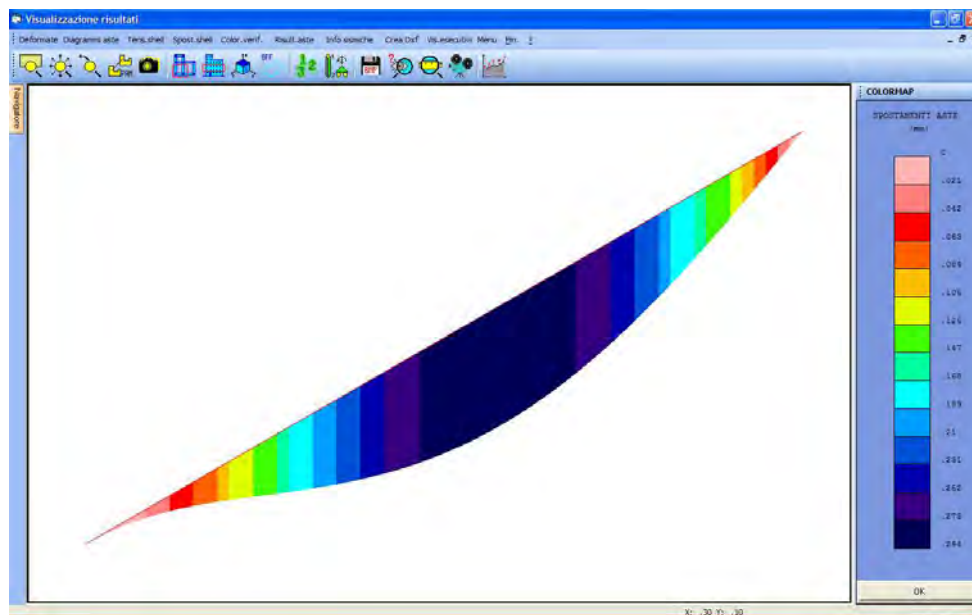


Fig. 3, Colormap deformazioni

^(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

^(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°7

Sistema piano di aste sospese (2)

Fonte di riferimento: W. Nash, Rif.[5]: Strength of Material, pg. 28-29, problem n. 2.3

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una barra infinitamente rigida è sospesa mediante il sistema di aste mostrato nella figura. Le due aste più esterne sono realizzate in acciaio, mentre quella interna è in rame. Le tre aste, per $z=L_2$, vengono vincolate con un incastro.

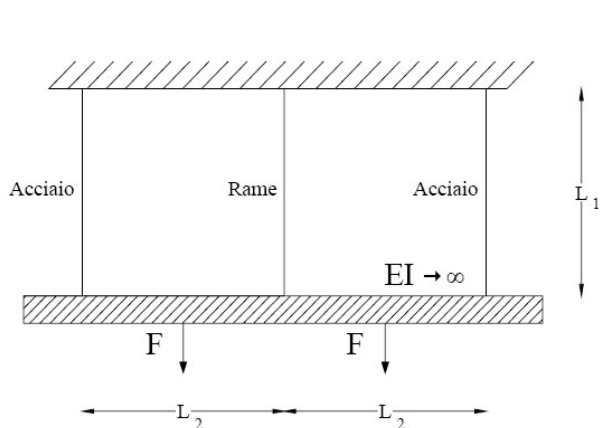


Fig. 1: Schema del problema

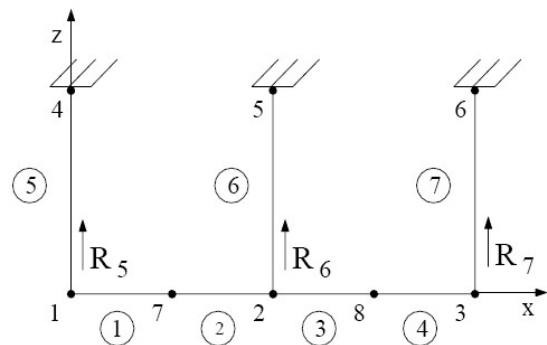


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle barre determinare lo sforzo in ciascuna delle aste verticali.

Modello di calcolo: Per la rappresentazione della struttura è sufficiente inserire n° 8 nodi, in corrispondenza sia degli estremi delle aste che dei punti di applicazione delle forze F, suddividendo così il sistema in un insieme di 7 aste.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{acciaio} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg cm}^2$	$L_1 = 7 \text{ ft} = 213.36 \text{ cm}$	$F = 12000 \text{ lb} = 5.44 \text{ t}$
$E_{rame} = 17 \times 10^6 \text{ psi} = 1195218 \text{ Kg/cm}^2$	$L_2 = 10 \text{ ft} = 304.80 \text{ cm}$	
	$A_{acciaio} = 0.50 \text{ in}^2 = 3.2258 \text{ cm}^2$	
	$A_{rame} = 1.50 \text{ in}^2 = 9.6774 \text{ cm}^2$	

Soluzione teorica: Le condizioni di simmetria impongono che le forze interne che insorgono in ciascuna delle due barre di acciaio siano uguali e pertanto, dalla statica rimane una sola equazione:

$$\sum F_v = 2P_{st} + P_{cu} - 2F = 0; \quad (1)$$

La (1) contiene due incognite e dunque il problema risulta staticamente indeterminato, ma ricordando che:

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

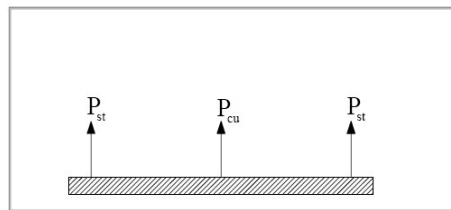


Fig. 3: Diagramma di corpo libero

ed imponendo che sia l'asta di rame che quelle in acciaio subiscano il medesimo allungamento, troviamo:

$$\frac{P_{st} L}{A_{st} E_{st}} = \frac{P_{cu} L}{A_{cu} E_{cu}} \quad \text{da cui: } P_{st} = 0.588 P_{cu} \quad (2)$$

la (2) insieme alla (1) fornisce:

$$R_5 = R_7 = 6485 \text{ lb} = 2.94 \text{ t}$$

$$R_6 = 11029 \text{ lb} = 5.00 \text{ t}$$

Analisi dei risultati (*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$R_5 = R_7 = 2.94 \text{ t}$	2.94 t	1.000
$R_6 = 5.00 \text{ t}$	5.00 t	1.000

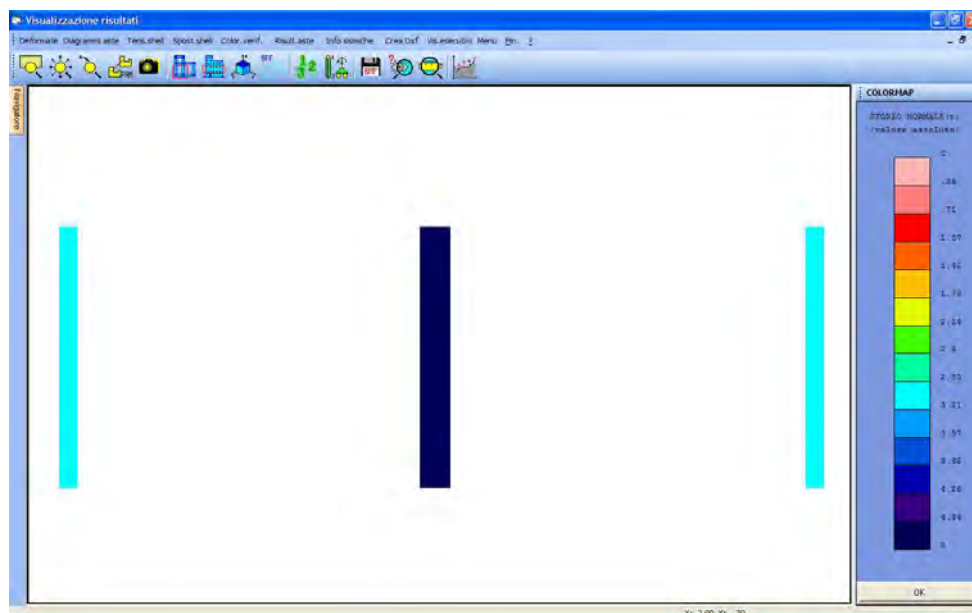


Fig. 4: Colormap sforzo normale

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°8

Sistema piano di aste sospese (3)

Fonte di riferimento: Timoshenko, Rif. [4]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 30, problem 9

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una barra infinitamente rigida è sospesa mediante il sistema di aste mostrato nella figura. La struttura così definita viene sottoposta ad un gradiente termico ΔT ed all'azione di un carico concentrato Q . Per $z = L_2$, le aste verticali vengono vincolate con un incastro.

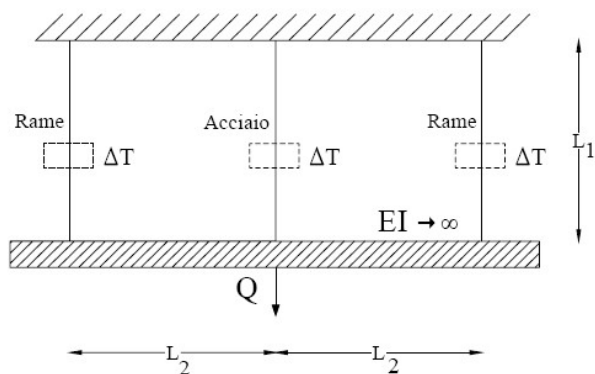


Fig. 1: Schema del problema

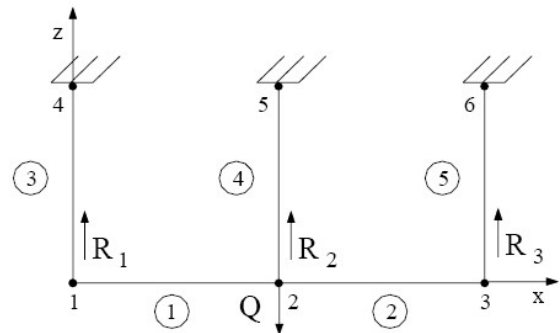


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle barre determinare gli sforzi in ciascuna delle aste verticali.

Modello di calcolo: Per la rappresentazione della struttura è sufficiente inserire, in corrispondenza sia degli estremi delle aste che del punto di applicazione delle forza Q , n° 6 nodi e quindi suddividere il sistema in un insieme di 5 aste.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{acciaio} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$L_1 = 20 \text{ in} = 50.8 \text{ cm}$	$Q = 4000 \text{ lb} = 1.81436 \text{ t}$
$\alpha_{acciaio} = 70 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$	$10 \text{ in} = 25.4 \text{ cm}$	$\Delta T = 10^\circ\text{F}$
$E_{rame} = 16 \times 10^6 \text{ psi} = 1124911 \text{ Kg/cm}^2$	$A = 0.10 \text{ in}^2 = 0.64516 \text{ cm}^2$	
$\alpha_{rame} = 92 \times 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$		

Soluzione teorica: Partendo dalla classica relazione:

$$F = K \times S$$

e considerando che:

$$F = Q + 2 \times (\alpha_{rame} \times \Delta T) \times E_{rame} \times A + (\alpha_{acciaio} \times \Delta T) \times E_{acciaio} \times A$$

$$K = 2 \times (E_{rame} \times A)/L + (E_{acciaio} \times A)/L$$

è facile ottenere:

$$N_{rame} = 681,7 \text{ Kg}$$

$$N_{acciaio} = 450,9 \text{ Kg}$$

Analisi dei risultati ^(*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio ^(**)</i>
$N_{rame} = 681,7 \text{ Kg}$	682 kg	1,000
$N_{acciaio} = 450,9 \text{ Kg}$	451 kg	1,000

Osservazioni : Poiché in **CDSWin** per le aste generiche è possibile definire un solo coefficiente di dilatazione termica α , per inserire il carico termico proposto nell'esercizio si è reso necessario imporre variazioni termiche differenti per le due tipologie di aste in esame secondo la relazione:

$$F_{termica-i} = \Delta L \times E_i A/L = L \times \alpha_i \times \Delta T \times E_i A/L = (\alpha_i \Delta T) \times E_i A$$

Da quanto esposto ne seguono i due seguenti carichi termici:

$$\Delta T_{acciaio} = 70 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{rame} = 9,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Inoltre, il prodotto ΔT_i è stato opportunamente dimensionato in modo che il risultato finale fosse numericamente coerente con i dati assegnati. Questo perché il programma **CDSWin**, in caso di analisi termica, provvede a moltiplicare il carico termico inserito per il coefficiente di dilatazione termica α , presente nei parametri generali relativi all'analisi termica, e posto pari a 1×10^{-5} .

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°9

Telaio piano

Fonte di riferimento: Timoshenko, Rif. [4]: Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, pg. 188-191

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Un telaio, staticamente indeterminato, è costituito da tre aste ed soggetto all'azione di una forza concentrata P applicata nella mezzzeria del traverso. I due ritti vengono vincolati al suolo mediante incastri.

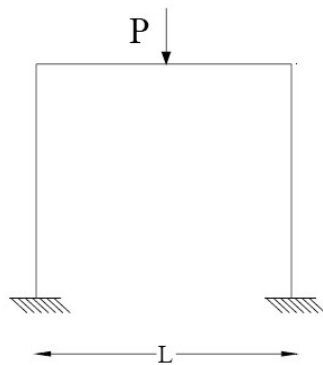


Fig. 1: Schema del problema

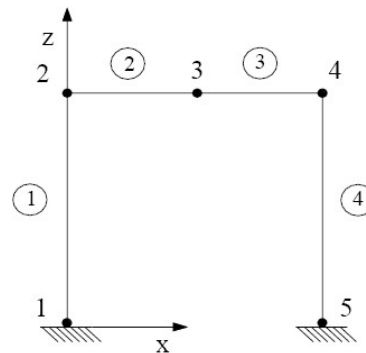


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste determinare la forza reattiva verticale in corrispondenza dei nodi 1 e 5.

Modello di calcolo: Per modellare correttamente la struttura è necessario inserire 5 nodi e 4 aste. Il nodo centrale n° 3 viene inserito per consentire l'input della forza concentrata. Per quanto riguarda la condizione di vincolo relativa ai nodi 1 e 5 vengono bloccati tutti i g.d.l.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L = 120 \text{ in} = 3.04 \text{ m}$	
$E_{\text{acciaio}} = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg cm}^2$	$h = 100 \text{ in} = 2.54 \text{ m}$	$P = 1000 \text{ lb} = 0.45 \text{ t}$
	$A_{\text{traverso}} = 8 \text{ in}^2 = 51.61 \text{ cm}^2$	
	$A_{\text{ritto}} = 4 \text{ in}^2 = 25.80 \text{ cm}^2$	

Soluzione teorica: La soluzione teorica fornisce:

$$V = 500 \text{ pounds} = 0.225 \text{ t}$$

Analisi dei risultati ^(*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio ^(**)</i>
$V = 0.225 \text{ t}$	0.225 t	1.000

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

()**: per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°10

Travatura reticolare piana

Fonte di riferimento: Tuma, J.J., Muns, R.K., Rif.[6]: Theory and Problems of Advanced Structural Analysis, Schaums's Outline Series, McGraw-Hill, pg. 257

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: La travatura reticolare piana riportata nella figura è costituita da 9 aste ed è vincolata mediante una cerniera ed un carrello. La struttura viene sottoposta all'azione simultanea dei carichi nodali P_x e P_z .

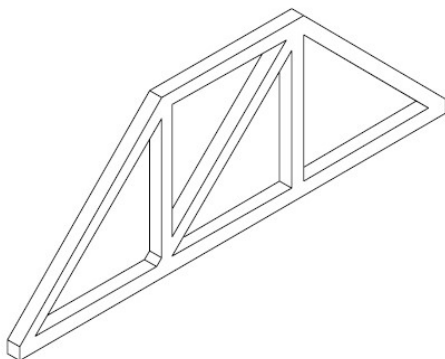


Fig. 1: Schema del problema

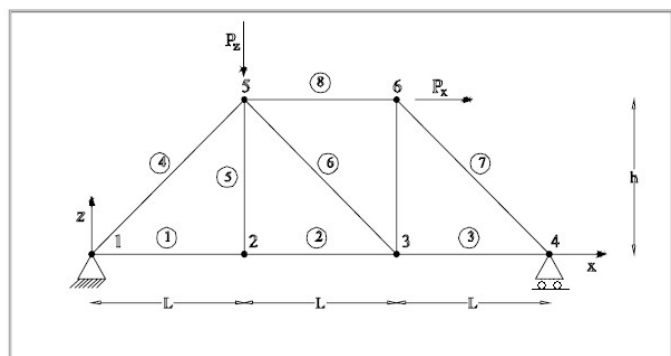


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste determinare gli spostamenti nodali associati alla configurazione di carico assegnata.

Modello di calcolo: In fig.2 viene riportata la rappresentazione agli elementi finiti della travatura piana in oggetto, le coordinate nodali vengono definite nel sistema di riferimento globale.

La struttura è costituita dall'unione di otto elementi in legno ed in corrispondenza dei nodi 1 e 4 vengono inseriti due vincoli appoggio. Inoltre, per tutti i nodi appartenenti al telaio, le traslazioni e le rotazioni fuori dal piano contenente la struttura vengono bloccate.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
	$L_1 = 20 \text{ ft} = 6.096 \text{ m}$	$P_x = 20 \text{ Kips} = 9.07 \text{ t}$
$E = 30 \times 10^4 \text{ Kips-ft}^2 / \text{ft}^2 = 146473 \text{ Kg/cm}^2$	$h = 15 \text{ ft} = 4.572 \text{ m}$	$P_z = 10 \text{ Kips} = 4.535 \text{ t}$
	$A = 1 \text{ ft}^2 = 929.03 \text{ cm}^2$	

Soluzione teorica:

Per carichi assiali la tensione normale è fornita dalla relazione:

$$\sigma = \frac{P}{A};$$

dove P rappresenta la forza assiale ed A l'area della sezione trasversale. Nelle condizioni descritte per il sistema assegnato, la deformazione della generica asta si ottiene dalla:

$$\Delta = \frac{PL}{AE};$$

Analisi dei risultati (*):**Spostamenti x-dir.**

<i>Nodi</i>	<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
1	0	0	1.000
2	0.451 mm	0.451 mm	1.000
3	0.902 mm	0.903 mm	1.001
4	1.128 mm	1.129 mm	1.001
5	0.914 mm	0.913 mm	0.999
6	1.094 mm	1.094 mm	1.000

Spostamenti z-dir.

<i>Nodi</i>	<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
1	0	0	1.000
2	-1.335 mm	-1.335 mm	1.000
3	-0.762 mm	-0.761 mm	0.999
4	0	0	1.000
5	-1.335 mm	-1.335 mm	1.000
6	-0.634 mm	-0.634 mm	1.000

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°11

Pipe-line soggetta a carico termico

Fonte di riferimento: Seely, F. B., and Smith, J.O., Rif. [7]: “Advanced Mechanics of Materials”, Second Edition, John Wiley and Sons, 1955, pages 494-497

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare Termica

Schema di calcolo: Lo studio dell'esercizio che segue consente di valutare la variazione di stato tensionale che si genera nella struttura in fig. 1 per effetto dell'azione di un gradiente termico ΔT .

Il sistema oggetto dello studio è costituito dall'insieme di tre aste di sezione circolare cava, ciascuna delle quali risulta soggetta ad un variazione termica.

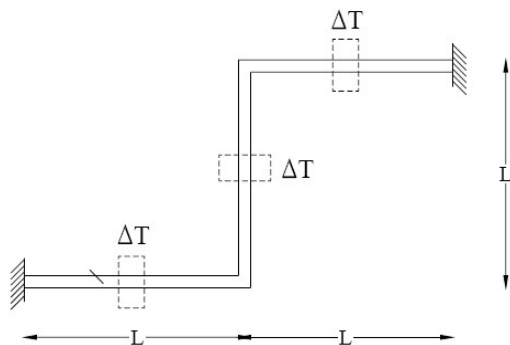


Fig. 1: Schema del problema

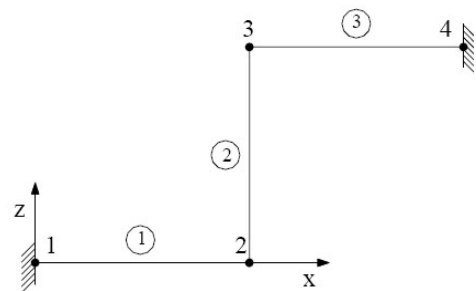


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Trascurando il peso delle aste determinare le reazioni vincolari in corrispondenza degli estremi vincolati.

Modello di calcolo: Il modello viene schematizzato utilizzando tre aste e quattro nodi. La condizione di incastro viene realizzata bloccando tutti i g.d.l. in corrispondenza dei nodi 1 e 4.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E_{\text{acciaio}} = 26.4 \times 10^6 \text{ psi} = 1856104 \text{ Kg/cm}^2$	$L = 240 \text{ in} = 6.096 \text{ m}$	
$\alpha = 7.26744 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$	$d_e = 12 \text{ in} = 30.48 \text{ cm}$	$\Delta T = 430^\circ\text{F}$
	$d_i = 10.25 \text{ in} = 26.03 \text{ cm}$	
	$A = 30.58 \text{ in}^2 = 197.293 \text{ cm}^2$	

Soluzione teorica: La soluzione dello schema assegnato si ottiene sopprimendo uno dei due vincoli esterni, sostituendo a questo le corrispondenti reazioni incognite ed impostando il seguente sistema di equazioni:

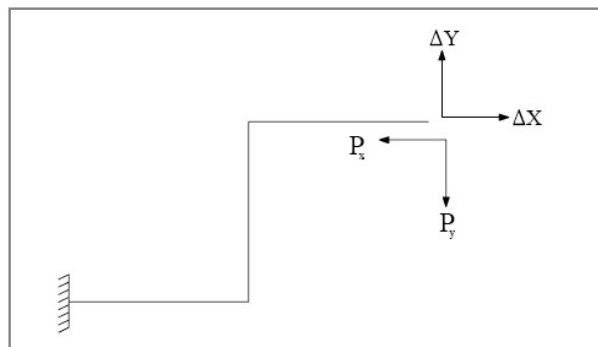


Fig. 3: Schema di risoluzione

$$\frac{7}{12} l^3 \frac{P_x}{EI} - \frac{1}{12} l^3 \frac{P_y}{EI} = \Delta X$$

$$-\frac{1}{2} l^3 \frac{P_x}{EI} - \frac{2}{3} l^3 \frac{P_y}{EI} = \Delta Y$$

da cui, risolvendo, si ottiene:

$$H_1 = H_2 = 8980.47 \text{ lb} = 4.07 \text{ t}$$

$$T_1 = T_2 = 7755.86 \text{ lb} = 3.51 \text{ t}$$

$$M_1 = M_2 = 783750 \text{ lb in} = 9.028 \text{ t m}$$

Analisi dei risultati ^(*):

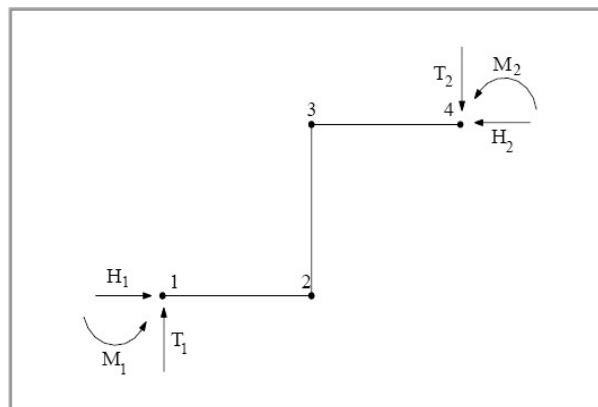


Fig. 4: Rappresentazione agli elementi finiti

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(**)
$H_1 = H_2 = 4.07 \text{ t}$	4.07 t	1.000
$T_1 = T_2 = 3.52 \text{ t}$	3.51 t	0.997
$M_1 = M_2 = 9.03 \text{ t m}$	9.02 t m	0.999

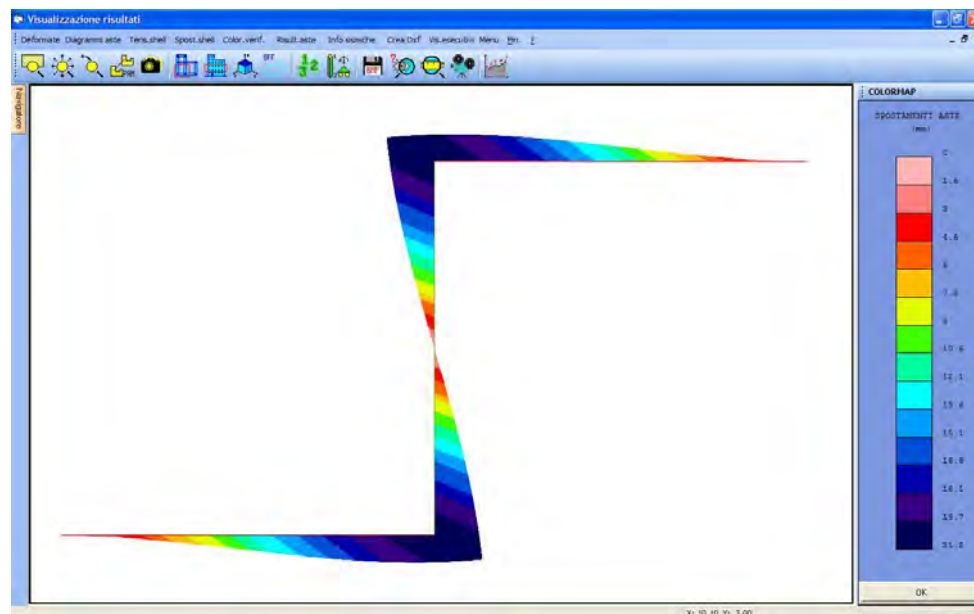


Fig. 4: Colormap deformazioni

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°12

Trave a mensola soggetta all'azione di un momento torcente concentrato

Fonte di riferimento: NAFEMS, Rif. [8]: Background to Benchmarks, 1993.

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: La trave a mensola della fig. 1, presenta una sezione trasversale a “Z” ed è soggetta, in corrispondenza dell'estremo libero, all'azione di un momento torcente generato dalla presenza di due forze di taglio F concentrate sulle ali. Lo studio di questa struttura mette in evidenza l'effetto della torsione in profili a sezione aperta e pareti sottili.

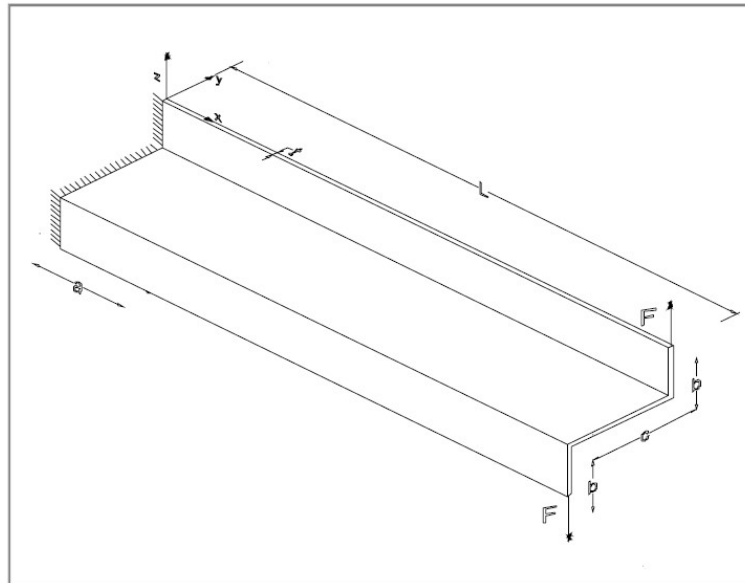


Fig. 1: Schema del problema

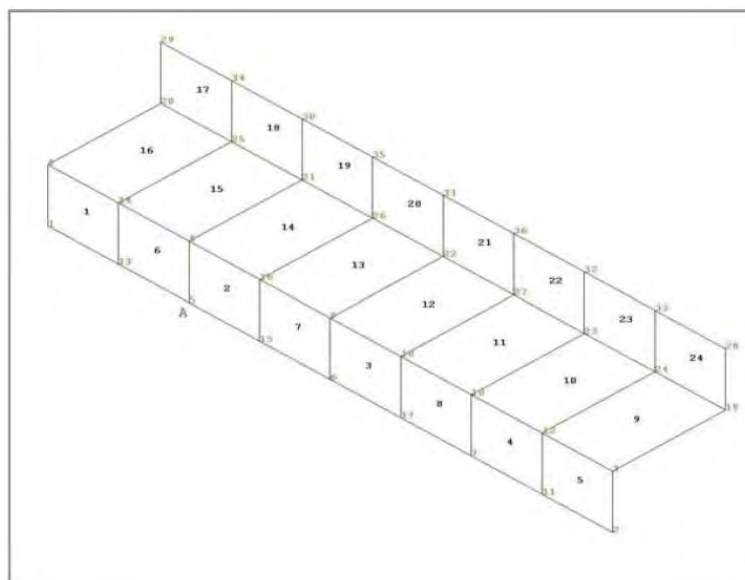


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Determinare il valore della tensione normale σ_x per la sezione trasversale posizionata, nel punto A, ad una distanza $x=2.5$ m dall'origine. Le tensioni normali da lastra variano linearmente lungo lo spessore delle ali, mentre sono costanti lungo lo spessore dell'anima. Le tensioni tangenziali da lastra variano, invece, quadraticamente lungo le ali e linearmente sull'anima.

Modello di calcolo: Per la definizione del modello viene utilizzata una mesh uniforme costituita da 24 elementi e 36 nodi. La condizione d'incastro ad un estremo viene realizzata inserendo un vincolo esplicito tale da bloccare tutti i gradi di libertà dei nodi presenti per $x=0$.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>	<i>Carico</i>
	$L = 10 \text{ m}$	
$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$a = 2.5 \text{ m}$	$F = 0.6 \text{ MN}$
$\nu = 0.3$	$b = 1.0 \text{ m}$	
	$c = 2.0 \text{ m}$	
	$t = 0.1 \text{ m}$	

Soluzione teorica:

La soluzione teorica fornisce:

$$\sigma_x = \frac{cb}{2} \frac{b+c}{2b+c} E g''(x);$$

e per $x = 2.5$ m si ricava:

$$\sigma_x(x = 2.5) = 107.9 \text{ MPa} = 1100.27 \text{ kg/cm}^2$$

Analisi dei risultati ^(*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio ^(**)</i>
$\sigma_x = 1100.27 \text{ kg/cm}^2$	1094.45	0.995

Osservazioni: L'analisi condotta evidenzia un'elevata corrispondenza tra il risultato teorico e quello fornito dall'elaborazione.

Il valore della tensione σ_x calcolato in **CDSWin** è la media dei corrispondenti valori $\sigma_{x\text{-superiore}}$ e $\sigma_{x\text{-inferiore}}$ del punto in esame (nodo 5).

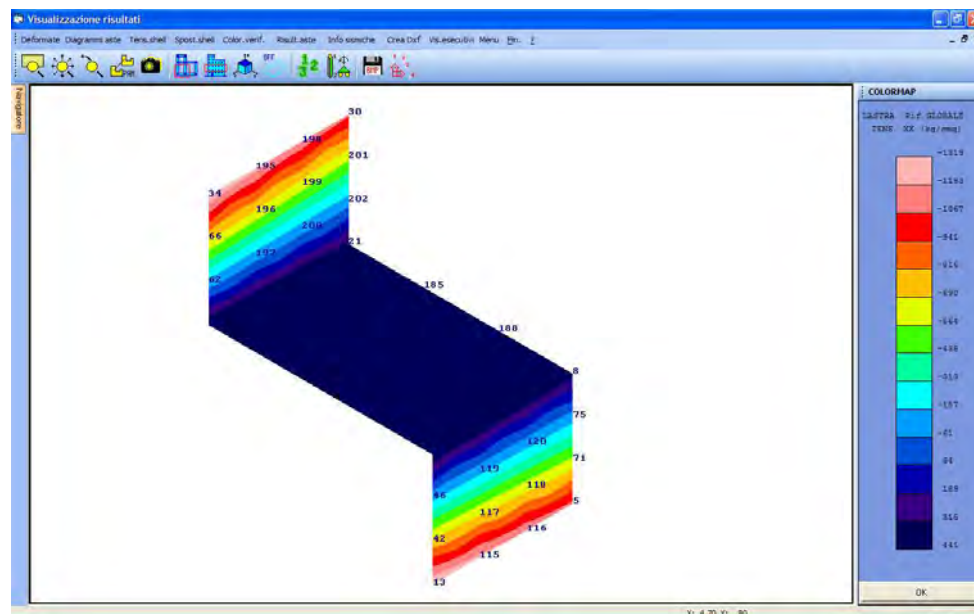


Fig. 1: Colormap tensioni

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°13

Trave a mensola a sezione variabile

Fonte di riferimento: Crandall, Rif. [9]: An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc.. New York, NY. 1959.

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una trave a mensola di lunghezza l è caratterizzata da una sezione di larghezza t e di altezza variabile, in modo uniforme, da un valore d , in corrispondenza dell'estremo libero, ad un valore pari a $3d$, in corrispondenza dell'estremo incastrato. Come mostrato in fig. 1 , il sistema così descritto viene sottoposto nell'estremo libero all'azione della forza concentrata F .

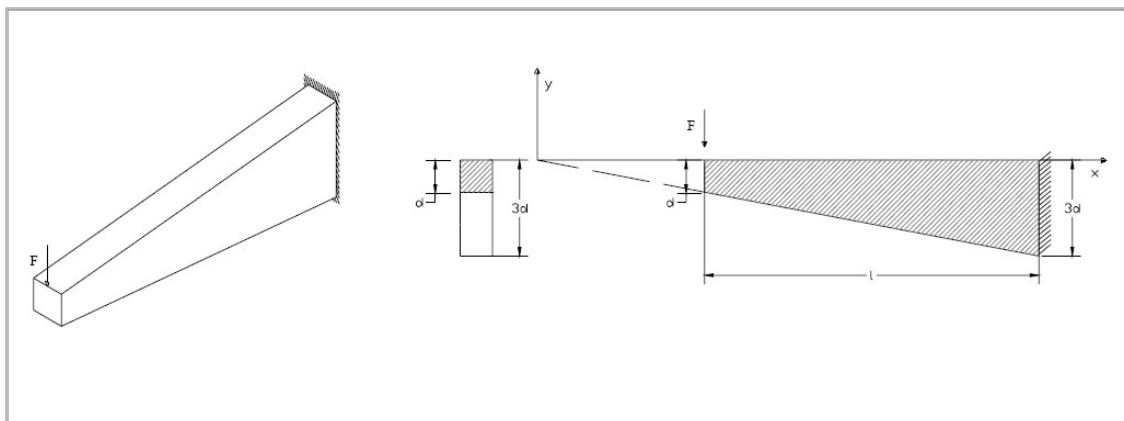


Fig. 1: Schema del problema

Obiettivo: Trascurando il peso della trave determinare il valore della tensione σ_{\max} in corrispondenza dell'estremo vincolato.

Modello di calcolo: La trave viene schematizzata mediante l'elemento *shell*. La rappresentazione del modello di calcolo comporta la discretizzazione di questo in una mesh di 15 elementi.

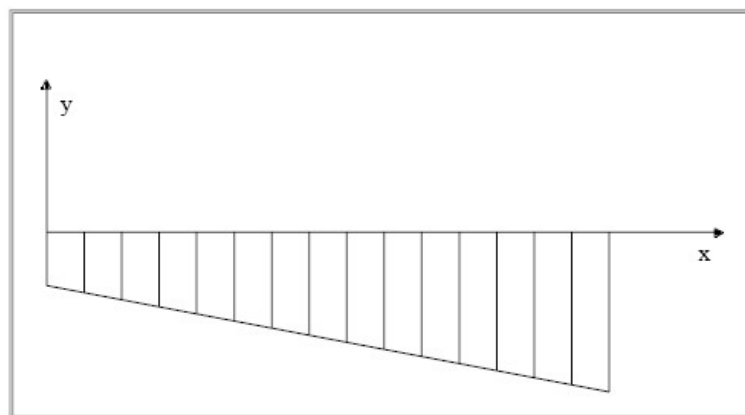


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Caratteristiche meccanico-geometriche:

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>	<i>Carico</i>
	$L=50 \text{ in} = 1.27 \text{ m}$	
$E=30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$d= 3 \text{ in} = 7.62 \text{ cm}$	$F= 4000 \text{ lb} = 1.81 \text{ t}$
$\nu=0.0$	$3d= 9 \text{ in} = 22.86 \text{ cm}$	
	$t = 2 \text{ in} = 5.08 \text{ cm}$	

Soluzione teorica: La soluzione teorica fornisce:

$$\sigma_{\max} = 7407 \text{ psi} = 520.76 \text{ Kg / cm}^2$$

Analisi dei risultati (*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
520.76 Kg / cm^2	521 Kg / cm^2	0.999

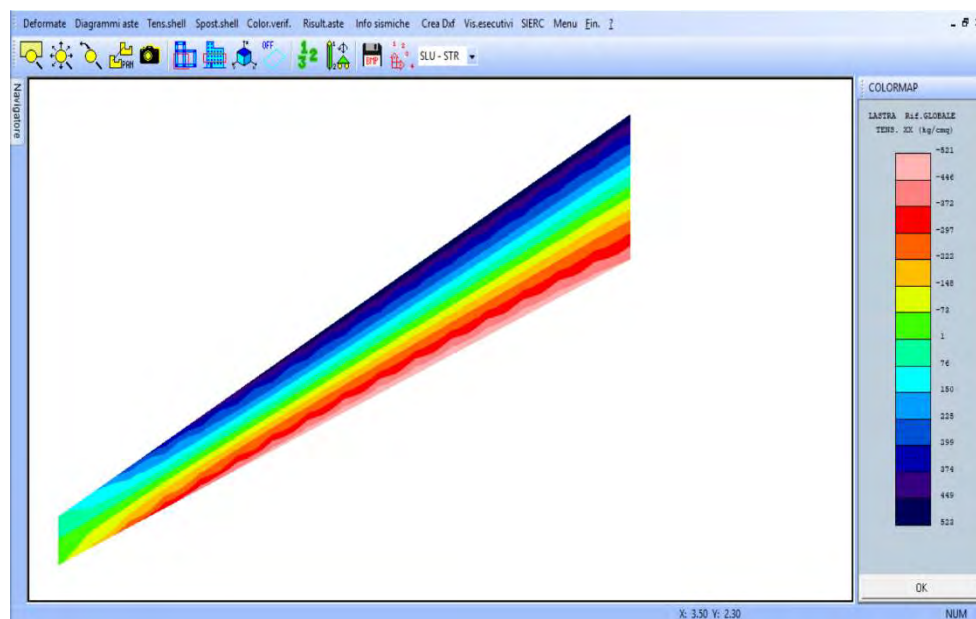


Fig. 3: Colormap tensioni

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°14

Lastra rettangolare piana

Fonte di riferimento: A&C - Rif.[3] - Rif.[16]: Analisi e calcolo n° 8, Gen.-Mar. 2002

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Lo schema in fig. mostra una lastra rettangolare piana semplicemente appoggiata sui 4 vertici soggetta a moto di corpo rigido.

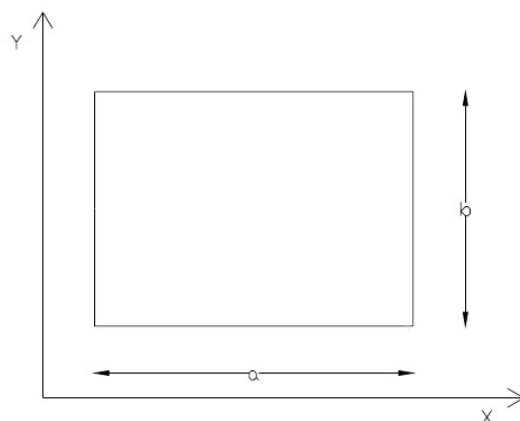
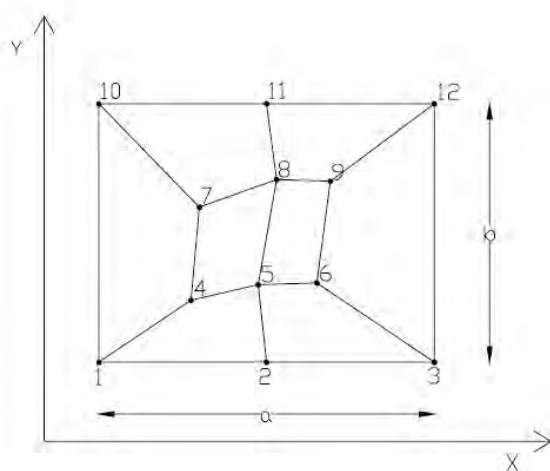


Fig. 1: Schema del problema

Obiettivo: Valutare il comportamento degli elementi bidimensionali sotto la condizione di moto rigido senza deformazioni.



Nodi	X (mm)	Y (mm)
1	0.0	0.0
2	5.0	0.0
3	10.0	0.0
4	2.75	1.8
5	4.75	2.2
6	6.5	2.3
7	3.0	4.5
8	5.3	5.3
9	6.9	5.25
10	0.0	7.5
11	5.0	7.5
12	10.0	7.5

Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Modello di calcolo: Ai fini del calcolo l'elemento è stato suddiviso in 8 sub-elementi in maniera da assicurare che la forma interna sia irregolare. In corrispondenza dei quattro vertici perimetrali sono stati considerati degli appoggi semplici, mentre per tutti i nodi presenti sul contorno non è stato considerato alcun tipo di vincolo.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>
$E=2000000 \text{ Kg/cm}^2$	Larghezza, $a=100 \text{ cm}$
$\nu=0.3$	Altezza, $b=75 \text{ cm}$
	Spessore, $t=10 \text{ cm}$

Vengono esaminati, separatamente i risultati relativi a tre diversi casi di studio:

- **Caso 1:** moto di corpo rigido in direzione X $\eta_x = 1 \text{ cm}$
- **Caso 2:** moto di corpo rigido in direzione Y $\eta_y = 1 \text{ cm}$
- **Caso 3:** moto di rotazione nel piano xy $\phi_{xy} = 45^\circ$

e per ciascuno di essi si valutano i valori max e min delle componenti delle tensioni

Caso n°1

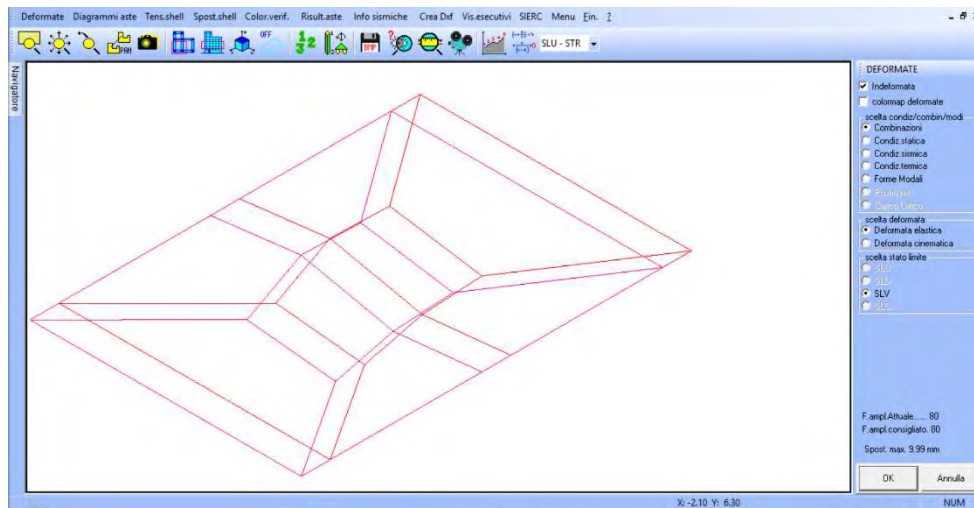
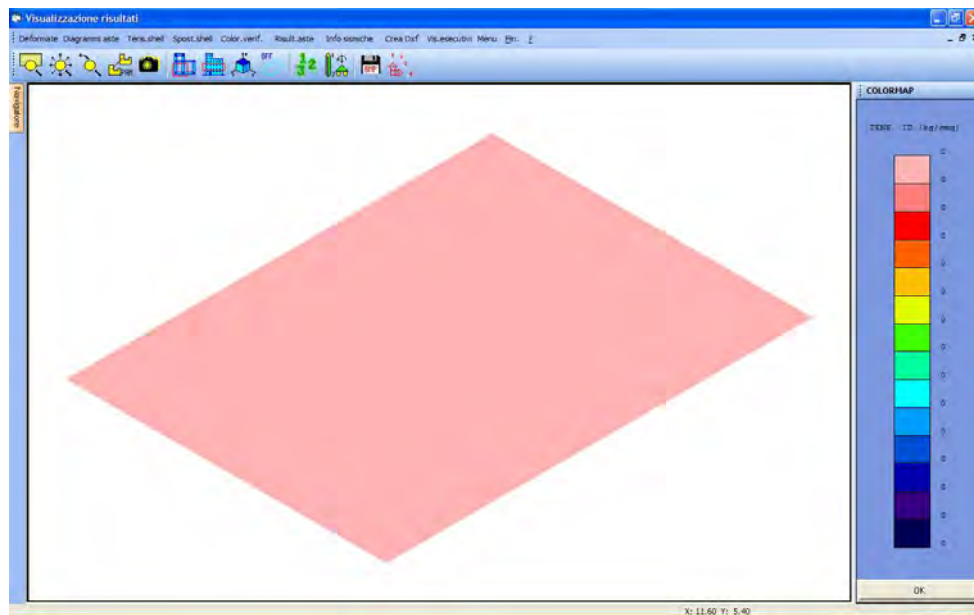
$\eta_x = 1 \text{ cm}$

Risultati: La soluzione teorica prevede che:

- per i moti di corpo rigido tutti gli spostamenti dei nodi interni all'elemento bidimensionale definito risultino uguali a quelli applicati al contorno;
- L'elemento deve essere privo di tensioni e di deformazioni:

Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:

<i>Nodi</i>	<i>Soluzione teorica (mm)</i>	<i>CDSWin (mm)</i>	<i>Ratio (%)</i>
1	10.0	10.0	1.000
2	10.0	10.0	1.000
3	10.0	10.0	1.000
4	10.0	10.0	1.000
5	10.0	10.0	1.000
6	10.0	10.0	1.000
7	10.0	10.0	1.000
8	10.0	10.0	1.000
9	10.0	10.0	1.000
10	10.0	10.0	1.000
11	10.0	10.0	1.000
12	10.0	10.0	1.000

*Fig. 3: Diagramma degli spostamenti**Fig. 4: Colormap tensioni*

Caso n°2

$\eta_y = 1 \text{ cm}$

Risultati: Idem caso 1);

Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:

Nodi	Soluzione teorica (mm)	CDSWin (mm)	Ratio (*)
1	10.0	10.0	1.000
2	10.0	10.0	1.000
3	10.0	10.0	1.000
4	10.0	10.0	1.000
5	10.0	10.0	1.000
6	10.0	10.0	1.000
7	10.0	10.0	1.000
8	10.0	10.0	1.000
9	10.0	10.0	1.000
10	10.0	10.0	1.000
11	10.0	10.0	1.000
12	10.0	10.0	1.000

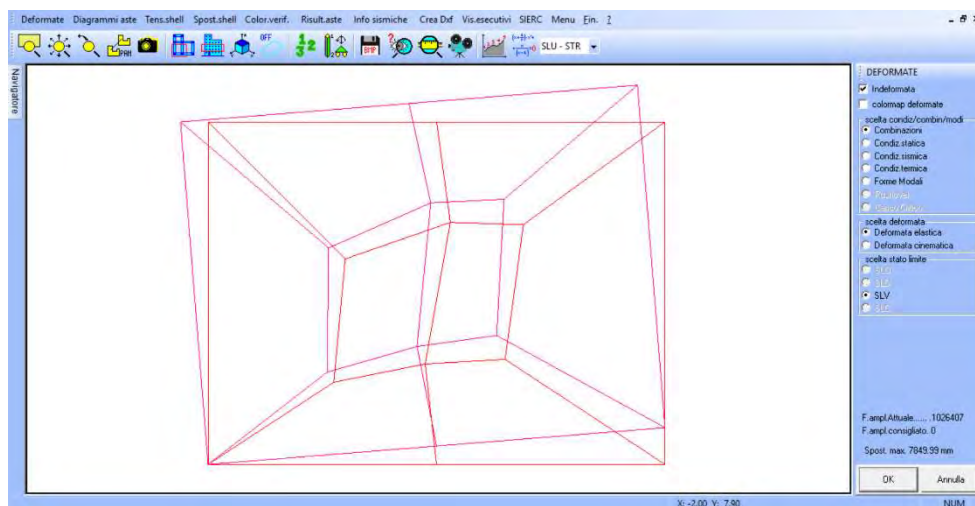
Caso n°3

$\phi_{xy} = 45^\circ$

Risultati: La soluzione teorica prevede che:

- a) per i moti di corpo rigido tutti gli spostamenti dei nodi interni all'elemento bidimensionale definito risultino coerenti con quelli applicati al contorno, e quindi la forma rettangolare dell'elemento deve essere mantenuta anche dopo aver applicato la rotazione;

Utilizzando i dati assegnati, si sono ottenuti i seguenti risultati:



(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°15

Flessione in una piastra circolare

Fonte di riferimento: Cremonese, Rif. [10]: Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. II pag. 114 e succ.

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una piastra circolare sottile di raggio a e spessore t è soggetta a diverse condizioni di vincolo e di carico.

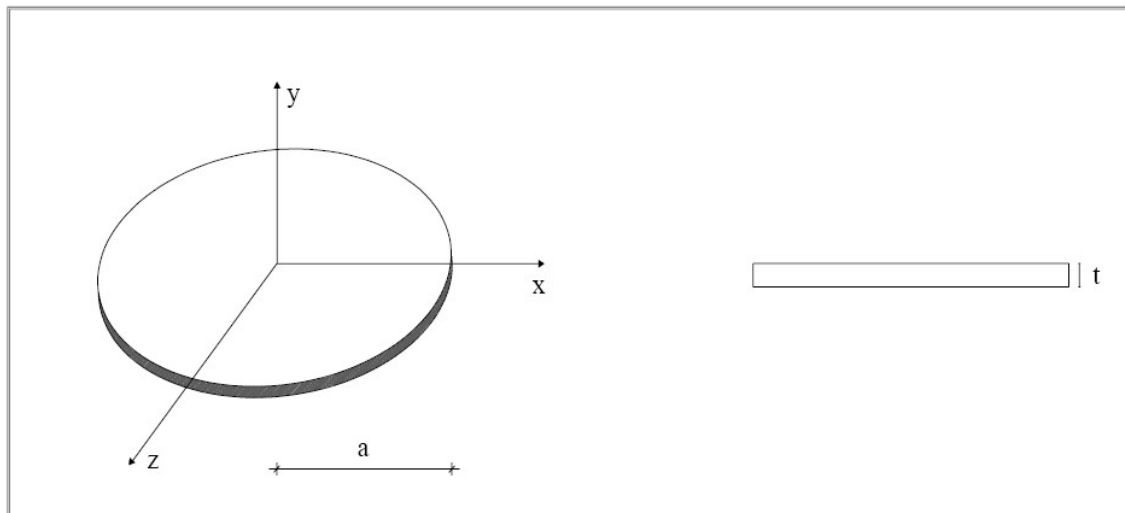


Fig. 1: Schema del problema

Obiettivo: Determinare l'abbassamento w in corrispondenza del centro della piastra per ciascuno dei seguenti casi:

- a) Carico uniformemente distribuito q_0 e contorno incastrato;
- b) Carico concentrato P in corrispondenza del centro della piastra e contorno incastrato;
- c) Carico uniformemente distribuito q_0 e contorno semplicemente appoggiato;

Caratteristiche meccanico-geometriche:

<i>Proprietà meccaniche</i>	<i>Proprietà geometriche</i>	<i>Carico</i>
$E=2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 1.5 \text{ m}$	$P = 2 \text{ t}$
$\nu = 0.3$	$t = 0.03 \text{ m}$	$q_0 = 10 \text{ t/m}^2$

Modello di calcolo: Nei tre casi oggetto dello studio il modello di calcolo viene ottenuto discretizzando la piastra mediante una mesh costituita dall'insieme di 150 elementi.

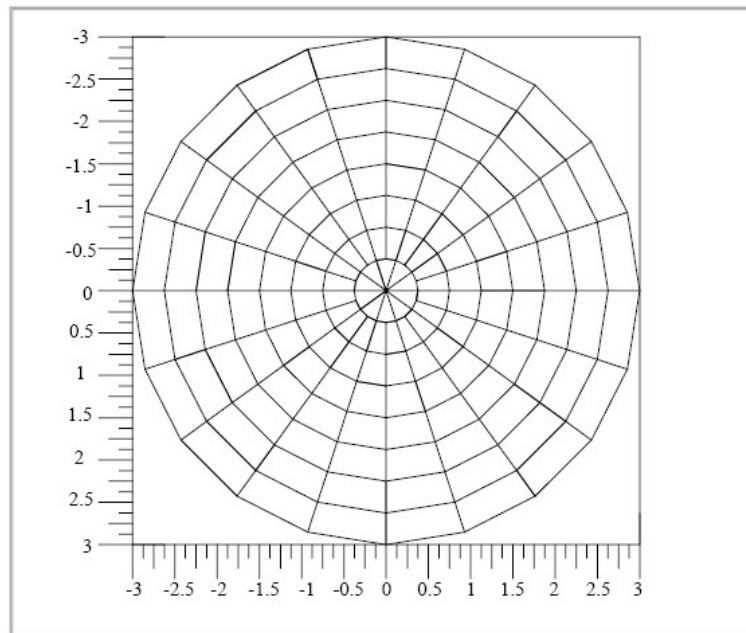
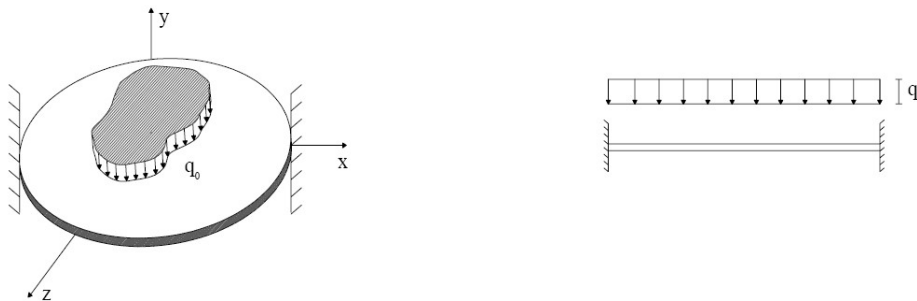


Fig. 2: Rappresentazione del modello di calcolo

Caso a) :

La piastra circolare incastrata al contorno e sollecitata da un carico uniforme.



Soluzione teorica: E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento $w(r)$ assume la seguente forma:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{64B} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2; \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = -\frac{q_0 a^2}{16} \left[\frac{r^2}{a^2} (3 + \nu) - 1 - \nu \right];$$

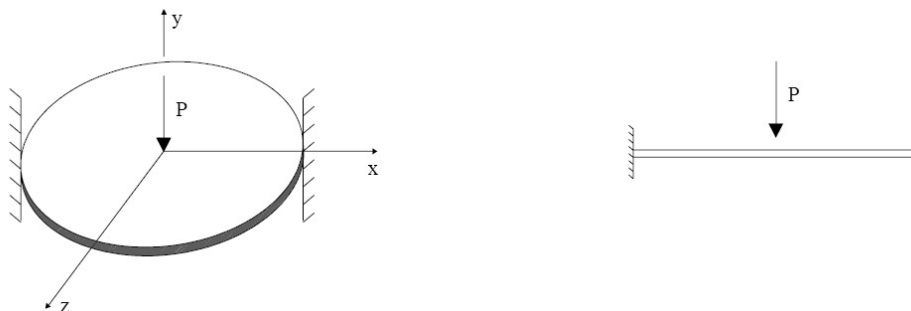
$$m_\theta = -\frac{q_0 a^2}{16} \left[\frac{r^2}{a^2} (1 + 3\nu) - 1 - \nu \right];$$

Analisi dei risultati:

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
$w_{max} = w(r=0) = 15.23 \text{ mm}$	15.49 mm	1.017

Caso b) :

La piastra circolare incastrata al contorno e sollecitata da una forza concentrata nel centro;



Soluzione teorica: E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento $w(r)$ assume la seguente forma:

$$w(r) = P \frac{a^2}{16\pi B} \left(2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} + 1 \right); \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = -P \frac{1}{4\pi} \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right];$$

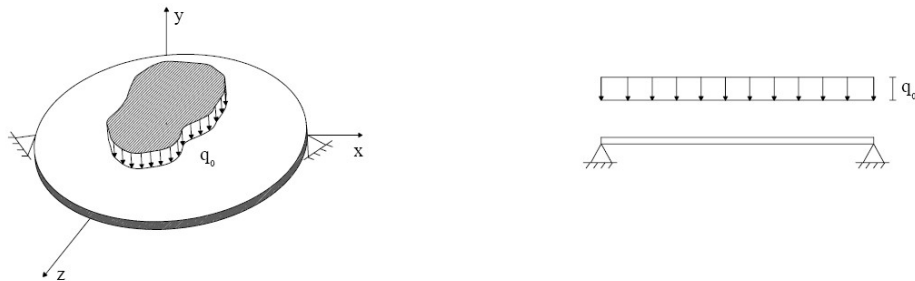
$$m_{\theta} = -P \frac{1}{4\pi} \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right];$$

Analisi dei risultati:

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
$w_{max} = w(r=0) = 1.725 \text{ mm}$	1.780 mm	1.032

Caso c) :

La piastra circolare appoggiata al contorno e sollecitata da un carico uniforme;



Soluzione teorica: E' noto che per questa condizione di carico la funzione abbassamento $w(r)$ assume la seguente forma:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{64B} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} - \frac{r^2}{a^2}\right); \quad B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$m_r = \frac{q_0 a^2}{16} (3+\nu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right);$$

$$m_q = \frac{q_0 a^2}{16} \left[3 + \nu - (1+3\nu) \frac{r^2}{a^2}\right]$$

Analisi dei risultati:

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
$w_{max} = w(r=0) = 62.09 \text{ mm}$	65.247 mm	1.051

(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°16

La piastra rettangolare incastrata al contorno e soggetta ad un carico uniformemente ripartito

Fonte di riferimento: Cremonese: “Manuale di ingegneria civile” Ed. 1982, pg. 113.

Tipo di analisi: Analisi Statica Lineare

Schema di calcolo: Una piastra rettangolare, di larghezza a e lunghezza b , ha uno spessore costante h ed è incastrata lungo i 4 lati. Il carico applicato consiste in una pressione q_0 uniformemente ripartita sull'intera superficie.

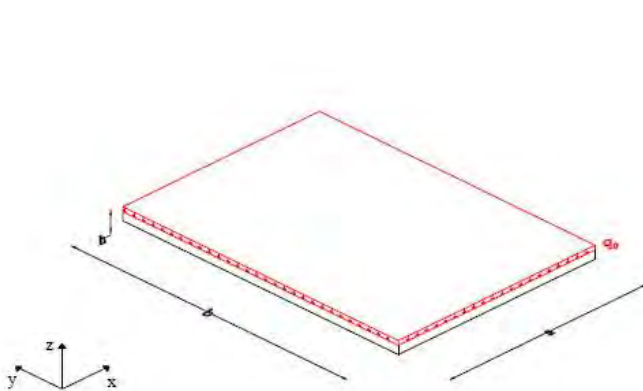


Fig. 1: Schema del problema

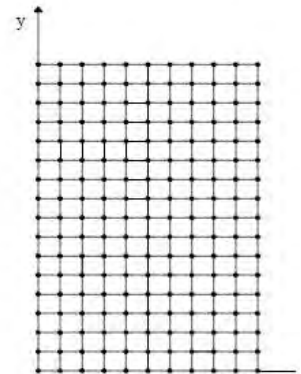


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E = 1000000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 100 \text{ cm}$	
$\nu = 0.2$	$b = 160 \text{ cm}$	$q_0 = 1 \text{ t/m}^2$
	$h = 1 \text{ cm}$	

Modello di calcolo: Il modello viene realizzato utilizzando una griglia formata da un totale di 100 elementi. In corrispondenza dei bordi perimetrali della piastra vengono inseriti dei vincoli esterni che, simulando l'incastro, bloccano tutti i gdl.

Obiettivo: Determinare l'abbassamento w_c e lo stato tensionale massimo in mezzeria della piastra (nodo 7).

Soluzione teorica: L'abbassamento cercato è fornito dalla seguente relazione:

$$w_c = C_f \frac{q_0 \times a^4}{D}$$

dove:

$$C_f (a/b) = 0.0023$$

$$D = \text{rigidezza flessionale della piastra} = \frac{E \times h^3}{12(1-\nu^2)}$$

Con i dati a disposizione:

$$w_c = 2.65 \text{ mm}$$

Per quanto attiene allo stato tensionale, si calcolano i momenti in campata:

$$M_{x-c} = (C_1 + \nu \cdot C_2) \cdot q_0 \cdot a^2$$

$$M_{y-c} = (C_2 + \nu \cdot C_1) \cdot q_0 \cdot a^2$$

dove:

$$C_1 (a/b) = 0.0358$$

$$C_2 (a/b) = 0.0086$$

Con i dati a disposizione:

$$\sigma_{x-c} = 225 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{y-c} = 95 \text{ kg/cm}^2$$

Analisi dei risultati (*):

<i>Soluzione teorica (mm)</i>	<i>CDSWin (mm)</i>	<i>Ratio (**)</i>
$w_c = 2.650 \text{ mm}$	2.652 mm	1.001
$\sigma_x = 225 \text{ Kg/cm}^2$	227.4 Kg/cm^2	1.011
$\sigma_y = 95 \text{ Kg/cm}^2$	93.5 Kg/cm^2	0.984

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°17

Carico critico di una trave piana

Fonte di riferimento: Qualsiasi testo di Scienza delle Costruzioni

Tipo di analisi: Non linearità geometrica

Schema di calcolo: Una trave ad asse rettilineo è caratterizzata da una sezione HEA100 e da una lunghezza l . Il sistema così descritto, variamente vincolato, viene sottoposto all'azione di un carico assiale P diretto lungo l'asse della trave.

Modello di calcolo: Per la rappresentazione del sistema si procede alla suddivisione dell'asta in 4 elementi. Alle estremità vengono inseriti vincoli esterni espliciti atti a simulare esclusivamente i movimenti consentiti nel piano dal vincolo considerato.

Obiettivo: Con riferimento alla struttura assegnata determinare il valore del carico critico per ciascuna delle seguenti condizioni di vincolo assegnate.

- Trave incastrata alla base e libera in testa;
- Trave incernierata alla base e con un carrello in testa;
- Trave incastrata alla base e con un carrello in testa;
- Trave incastrata alla base e con un incastro scorrevole in testa;

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
	$l = 3 \text{ m}$
$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$h = 96 \text{ mm}$
	$b = 100 \text{ mm}$

Caso a) :

Trave incastrata alla base e libera in testa

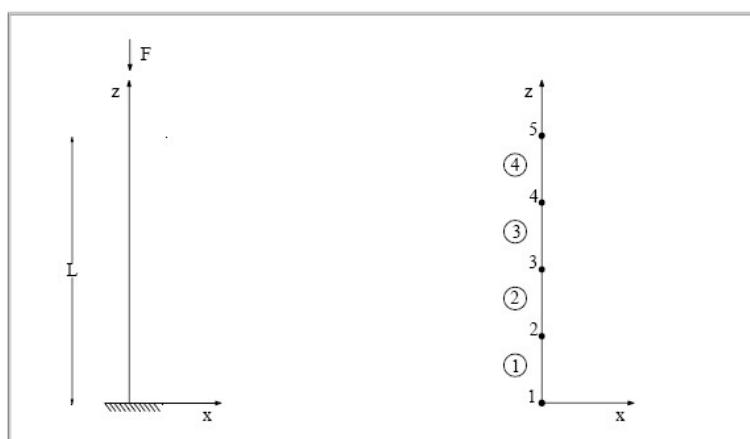


Fig. 1: Schema del problema e del modello di calcolo

Soluzione teorica: Per una trave piana semplicemente incastrata ad un estremo l'espressione che fornisce il carico critico teorico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

Nel caso in esame:

$$P_{cr} = 7.703 \text{ t}$$

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
$P_{cr} = 7.703 \text{ t}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 0.1 \cdot 77.04 = 7.704 \text{ t}$	1.000

Caso b) :

Trave incernierata alla base e con un carrello in testa

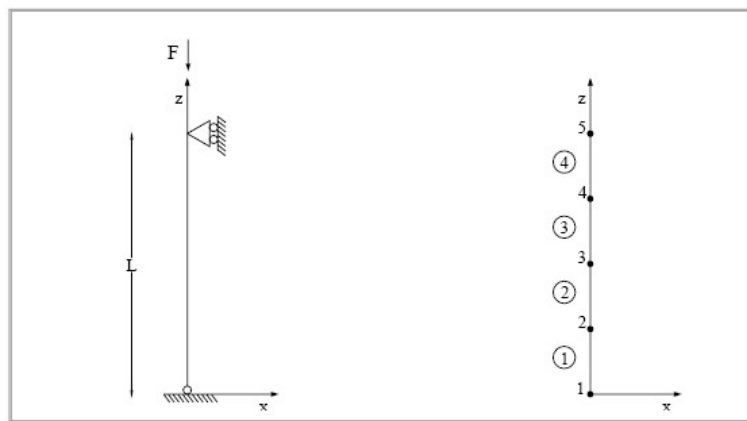


Fig. 2: Schema del problema e del modello di calcolo

Soluzione teorica: Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 30.815 \text{ t}$$

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
$P_{cr} = 30.815 \text{ t}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 1 \cdot 30.83 = 30.830 \text{ t}$	1.001

Caso c) :

Trave incastrata alla base e con un carrello in testa;

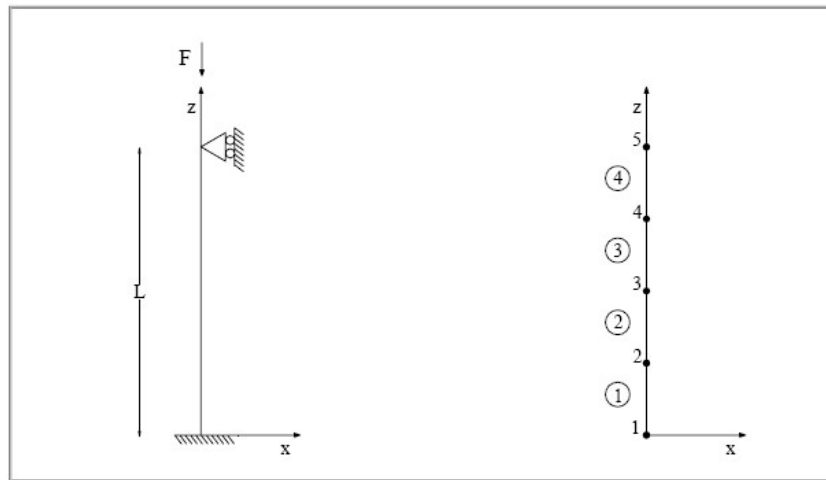


Fig. 3: Schema del problema e del modello di calcolo

Soluzione teorica: Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.699L)^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 63.068 \text{ t}$$

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (%)</i>
$P_{cr} = 63.068 \text{ Kg}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 1 \cdot 63.17 = 63.170 \text{ Kg}$	1.002

Caso d) :

Trave incastrata alla base e con un incastro scorrevole in testa

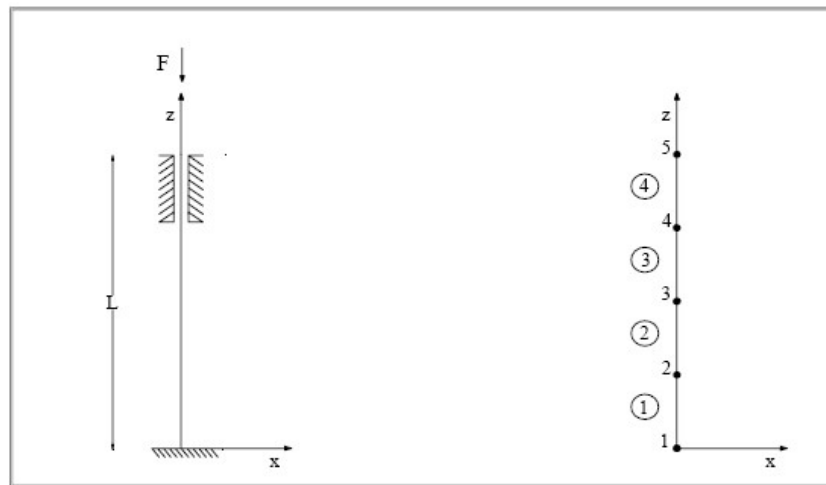


Fig. 4: Schema del problema e del modello di calcolo

Soluzione teorica: Per la trave piana riportata in fig.3 l'espressione che fornisce il carico critico è data da:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$

nel caso in esame:

$$P_{cr} = 123.260 \text{ Kg}$$

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
$P_{cr} = 123.260 \text{ Kg}$	$P \cdot \text{molt}_{cr} = 1 \cdot 124.18 = 124.180 \text{ Kg}$	1.007

(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°18

Frequenze naturali di vibrazione in una trave appoggiata- appoggiata

Fonte di riferimento: Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Rif. [11]: Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill Book Company, cap. 18

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Una trave a sezione rettangolare è isostaticamente vincolata mediante due appoggi semplici ed è soggetta esclusivamente all'azione del proprio peso.

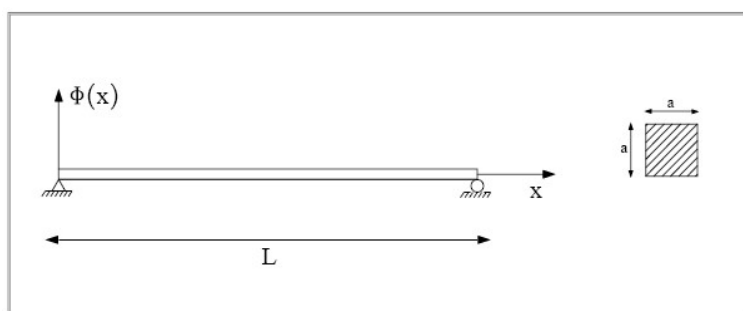


Fig. 1: Schema del problema

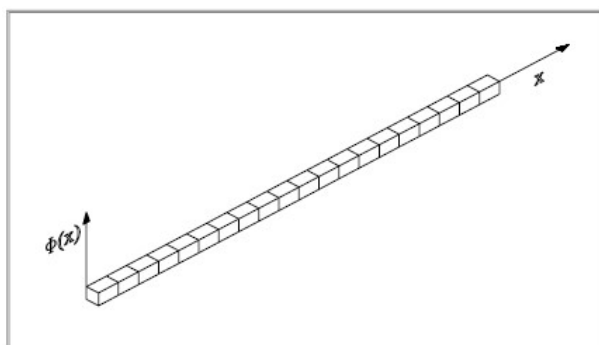


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Per il sistema assegnato determinare i primi tre modi di vibrare.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E=2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 30 \text{ cm}$	$P_p = 706.5 \text{ Kg/m}$
	$L = 10 \text{ m}$	

Modello di calcolo: Il sistema assegnato viene suddiviso in un insieme di 20 elementi. In corrispondenza del nodo iniziale e di quello finale vengono inseriti due vincoli esterni espliciti che bloccano tutti i gdl ad eccezione della rotazione attorno all'asse y. Per i restanti nodi vengono consentite, esclusivamente, la rotazione attorno all'asse y e le traslazioni nel piano.

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (**)</i>
$\omega_1 = 43.79 \text{ rad/sec}$	43.79 rad/sec	1.000
$\omega_2 = 175.16 \text{ rad/sec}$	175.14 rad/sec	1.000
$\omega_3 = 394.11 \text{ rad/sec}$	394.06 rad/sec	1.000

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°19

Frequenze naturali di vibrazione in una trave a mensola

Fonte di riferimento: Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Rif. [11]: Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill Book Company, cap. 1

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Si consideri la trave prismatica dell'esercizio precedente sostituendo lo schema statico in modo tale che risulti incastrata ad un estremo e libera all'altro.

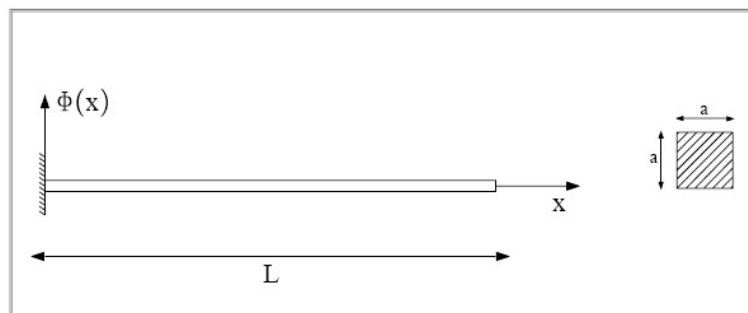


Fig. 1: Schema del problema

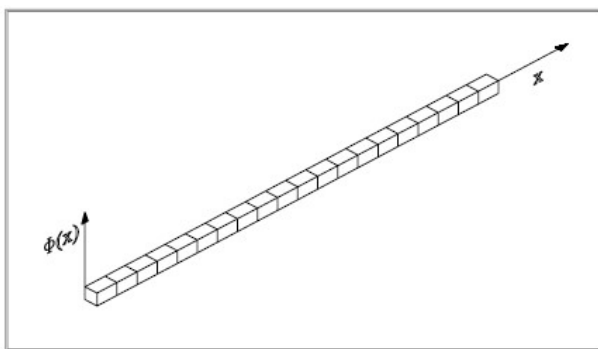


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Per il sistema assegnato determinare i primi tre modi di vibrare.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche	Carico
$E = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 30 \text{ cm}$	$P_p = 706.5 \text{ Kg/m}$
	$L = 10 \text{ m}$	

Modello di calcolo: Il sistema assegnato viene suddiviso in un insieme di 20 elementi. In corrispondenza del nodo iniziale viene inserito un vincolo esterno tale da bloccare tutti i gdl. Per i restanti nodi vengono consentite, esclusivamente, la rotazione attorno all'asse y e le traslazioni nel piano.

Analisi dei risultati:

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio ^(**)</i>
$\omega_1 = 15.60 \text{ rad/sec}$	15.58 rad/sec	0.999
$\omega_2 = 97.76 \text{ rad/sec}$	97.37 rad/sec	0.996
$\omega_3 = 273.76 \text{ rad/sec}$	271.94 rad/sec	0.993

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°20

Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore semplice

Fonte di riferimento: Thomson, Rif. [12]: Vibration Theory and Applications, pg. 6, ex. 1.2-2

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Si consideri il sistema dinamico ad un solo gdl mostrato nella fig. 1. La massa totale di questo sistema è concentrata ad un estremo della molla, mentre l'altro viene bloccato.

La resistenza elastica allo spostamento è fornita dalla molla, priva di massa e di rigidità K .

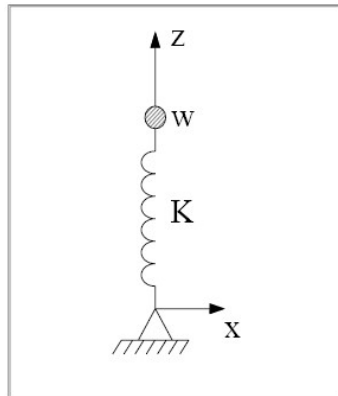


Fig. 1: Schema del problema

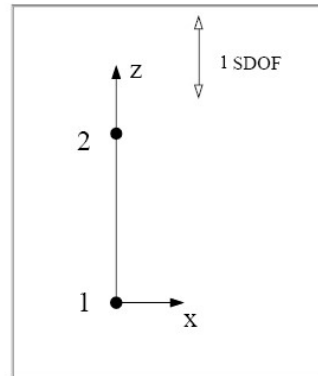


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Per il sistema assegnato valutare la frequenza naturale di vibrazione.

Modello di calcolo: Per la rappresentazione del modello di calcolo è sufficiente inserire 2 nodi in corrispondenza degli estremi della molla. La lunghezza della molla è arbitraria ed alla massa w viene consentito solo 1 gdl lungo la direzione dell'asse della molla.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Carico
$K=48 \text{ lb/in} = 857.18 \text{ Kg/m}$	9.81 m/s^2
$w = 2.5 \text{ lb} = 0.00113 \text{ t}$	

Soluzione teorica:

Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$$\omega = 13.701 \text{ cycle/sec} = 86.085 \text{ rad/sec}$$

Analisi dei risultati ^(*):

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio ^(**)
$\omega = 86.085 \text{ rad/sec}$	86. 255 rad/sec (3°modo verticale)	1.001

Osservazioni: Per simulare la molla, in **CDSWin**, si è reso necessario inserire un'asta di caratteristiche meccanico-geometriche tali che la rigidezza risultante fosse identica a quella assegnata.

Ricordando che:

$$K = EA/L$$

ponendo:

$$A = 100 \text{ cm}^2$$

$$L = 100 \text{ cm},$$

e considerando $K=857.18 \text{ Kg/m}$, si trova:

$$E = KL/A = 8.57 \text{ kg/cm}^2$$

Per simulare la presenza della massa si è inserita una forza concentrata in corrispondenza del nodo 2, diretta verso il basso lungo la direzione dell'asse z e di entità pari alla massa w considerata.

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°21

Frequenza naturale di vibrazione di un oscillatore con due masse in serie

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Si consideri l'oscillatore a due gradi di libertà mostrato in fig.1; esso risulta costituito da 3 molle, prive di massa, di rigidezza K_1 , K_2 e $K_3=K_1$, e da due masse concentrate $m_1=m_2=m$ poste in serie.

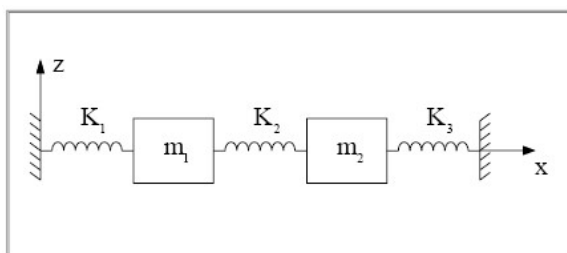


Fig. 1: Schema del problema

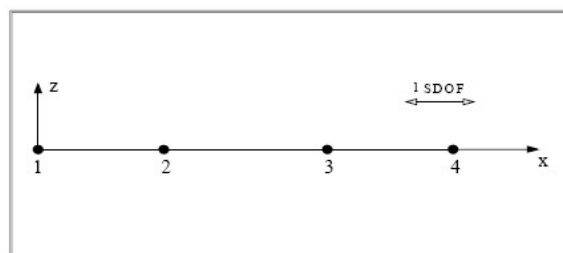


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Per il sistema assegnato valutare la frequenza naturale di vibrazione.

Modello di calcolo: Per la rappresentazione del modello di calcolo è sufficiente inserire 4 nodi, 2 in corrispondenza degli estremi della molla e 2 in corrispondenza delle masse concentrate. La lunghezza delle molle è arbitraria ed alle masse m_1 ed m_2 viene consentito solo 1 gdl lungo la direzione dell'asse delle molle.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Carico
$K_1 = K_3 = K = 200 \text{ Kg/cm}$	
$K_2 = 4 K = 800 \text{ Kg/cm}$	$g = 981 \text{ cm/s}^2$
$m_1 = m_2 = 1 \text{ Kg} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$	

Nel caso in esame utilizzando i dati assegnati, si trova:

$$\omega_1 = 14.142 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = 42.426 \text{ rad/sec}$$

Analisi dei risultati:

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (**)
14.142 rad/sec	14.142 rad/sec	1.000
42.426 rad/sec	42.426 rad/sec	1.000

Osservazioni: Per simulare le tre molle, in CDSWin, si è reso necessario inserire tre aste di caratteristiche meccanico-geometriche tali che le rispettive rigidezze risultanti fosse identiche a quelle assegnate.

Ricordando che:

$$K=EA/L$$

si è posto:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A = 100 \text{ cm}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L = 100 \text{ cm},$$

e considerando $K_1 = K_3 = K = 200 \text{ Kg/cm}$, si trova:

$$E_1 = E_3 = E = KL/A = 200 \text{ kg/cm}^2$$

analogamente, considerando $K_c = 800 \text{ Kg/cm}$, si trova:

$$E = 800 \text{ kg/cm}^2$$

Per simulare la presenza delle due masse, si sono inserite due forze concentrate in corrispondenza dei nodi 2 e 3, entrambe dirette verso il basso lungo la direzione dell'asse z e di entità pari alla massa m considerata.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°22

Analisi in frequenza di una piastra rettangolare

Fonte di riferimento: Blevins, Robert D., Rif. [13]: "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Company, 1979, pg. 258.

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Una piastra rettangolare, di larghezza a e lunghezza b , ha uno spessore costante t ed è semplicemente appoggiata lungo i 4 lati.

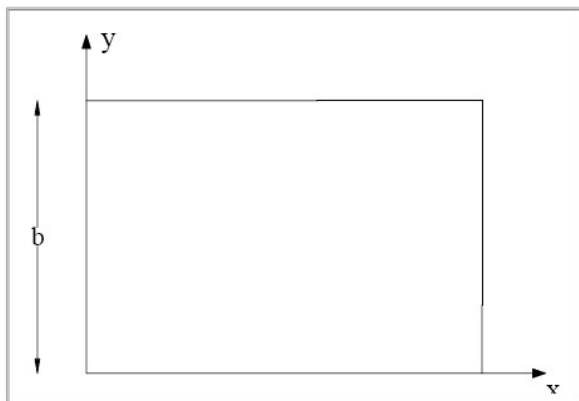


Fig. 1: Schema del problema

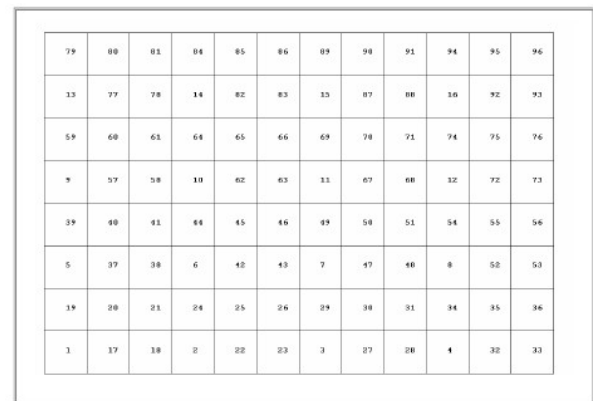


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Analizzare il comportamento dinamico dell'elemento piastra.

Modello di calcolo: Per la schematizzazione del modello di calcolo si fa riferimento ad una mesh formata da 96 elementi, ognuno composto da una mesh (3x3). In corrispondenza dei bordi perimetrali vengono inseriti dei vincoli che simulano gli appoggi.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E = 30 \times 10^6 \text{ psi} = 2109209 \text{ Kg/cm}^2$	$a = 45 \text{ in} = 114.3 \text{ cm}$
$\nu = 0.3$	$b = 30 \text{ in} = 76.2 \text{ cm}$
$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$	$t = 0.2 \text{ in} = 0.508 \text{ cm}$

Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$\omega_1 = 30.94 \text{ cycle/sec} = 194.30 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 59.49 \text{ cycle/sec} = 373.59 \text{ rad/sec}$
$\omega_3 = 95.18 \text{ cycle/sec} = 597.73 \text{ rad/sec}$
$\omega_4 = 107.1 \text{ cycle/sec} = 672.58 \text{ rad/sec}$
$\omega_5 = 123.7 \text{ cycle/sec} = 776.83 \text{ rad/sec}$
$\omega_6 = 171.3 \text{ cycle/sec} = 1075.76 \text{ rad/sec}$

Analisi dei risultati (*):

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (**)
194.30 rad/sec	194.18 rad/sec	0.999
373.59 rad/sec	373.00 rad/sec	0.998
597.73 rad/sec	596.85 rad/sec	0.999
672.58 rad/sec	670.84 rad/sec	0.997
776.83 rad/sec	774.02 rad/sec	0.996
1075.76 rad/sec	1069.02 rad/sec	0.994

Raffittendo la mesh fino a definire una maglia composta da 3456 elementi, si ottengono i seguenti risultati:

Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (**)
194.30 rad/sec	194.24 rad/sec	1.000
373.59 rad/sec	373.27 rad/sec	0.999
597.73 rad/sec	597.05 rad/sec	0.999
672.58 rad/sec	671.41 rad/sec	0.998
776.83 rad/sec	775.05 rad/sec	0.998
1075.76 rad/sec	1071.40 rad/sec	0.996

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per Ratio si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°23

Analisi in frequenza di una piastra sottile romboidale

Fonte di riferimento: Rif. [14]: The STANDARD NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 5 October, 1990

Tipo di analisi: Analisi Dinamica Modale

Schema di calcolo: Una piastra sottile romboidale, con i quattro lati uguali di lunghezza L , ha uno spessore costante h ed è incastrata lungo il contorno.

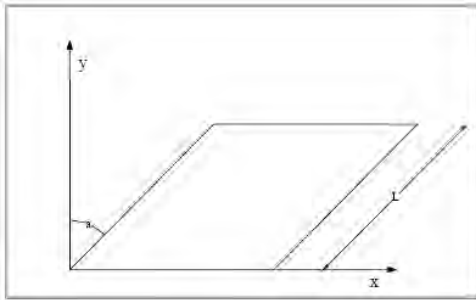


Fig. 1: Schema del problema

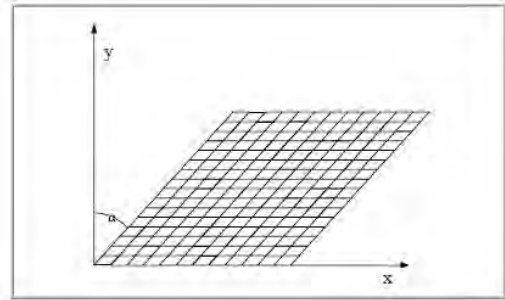


Fig. 2: Rappresentazione agli elementi finiti

Obiettivo: Analizzare il comportamento dinamico dell'elemento piastra.

Modello di calcolo: Per la schematizzazione del modello di calcolo si fa riferimento ad una griglia formata da 192 elementi. In corrispondenza dei bordi perimetrali vengono inseriti dei vincoli incastro.

Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche	Proprietà geometriche
$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	$L = 10 \text{ m}$
$\nu = 0.3$	$h = 0.05 \text{ m}$
$\rho = 8000 \text{ Kg/m}^3$	$\alpha = 45^\circ$

Soluzione teorica: Utilizzando i dati assegnati, si trova:

$\omega_1 = 7.938 \text{ cycle/sec} = 49.85 \text{ rad/sec}$
$\omega_2 = 12.835 \text{ cycle/sec} = 80.60 \text{ rad/sec}$
$\omega_3 = 17.941 \text{ cycle/sec} = 112.70 \text{ rad/sec}$
$\omega_4 = 19.133 \text{ cycle/sec} = 120.15 \text{ rad/sec}$
$\omega_5 = 24.009 \text{ cycle/sec} = 150.77 \text{ rad/sec}$
$\omega_6 = 27.922 \text{ cycle/sec} = 175.35 \text{ rad/sec}$

Analisi dei risultati ^(*):

<i>Soluzione teorica</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio ^(**)</i>
<i>49.85 rad/sec</i>	<i>48,72 rad/sec</i>	<i>0. 977</i>
<i>80.60 rad/sec</i>	<i>79,01 rad/sec</i>	<i>0. 980</i>
<i>112.70 rad/sec</i>	<i>111,12 rad/sec</i>	<i>0. 986</i>
<i>120.15 rad/sec</i>	<i>116,20 rad/sec</i>	<i>0. 967</i>
<i>150.77 rad/sec</i>	<i>148.67 rad/sec</i>	<i>0. 986</i>
<i>175.35 rad/sec</i>	<i>168,50 rad/sec</i>	<i>0. 961</i>

(*): vedasi nota introduttiva relativa alla conversione delle unità di misura.

(**): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

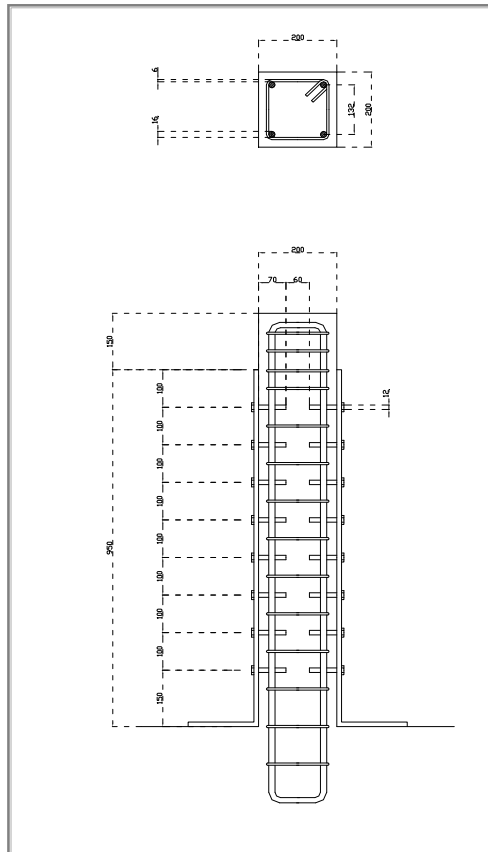
Test di verifica n°24

Elemento mensola a sezione costante

Fonte di riferimento: Dati sperimentali

Tipo di analisi: Analisi Statica non Lineare.

Schema di calcolo: Sia dato un pilastro a sezione quadrata, isostaticamente vincolato con un incastro alla base e libero in corrispondenza dell'altro estremo, di cui è nota la distribuzione di armatura all'interno della sezione stessa. La struttura così definita viene sottoposta all'azione di un carico assiale noto ed uno orizzontale, applicato in testa e monotonicamente crescente.

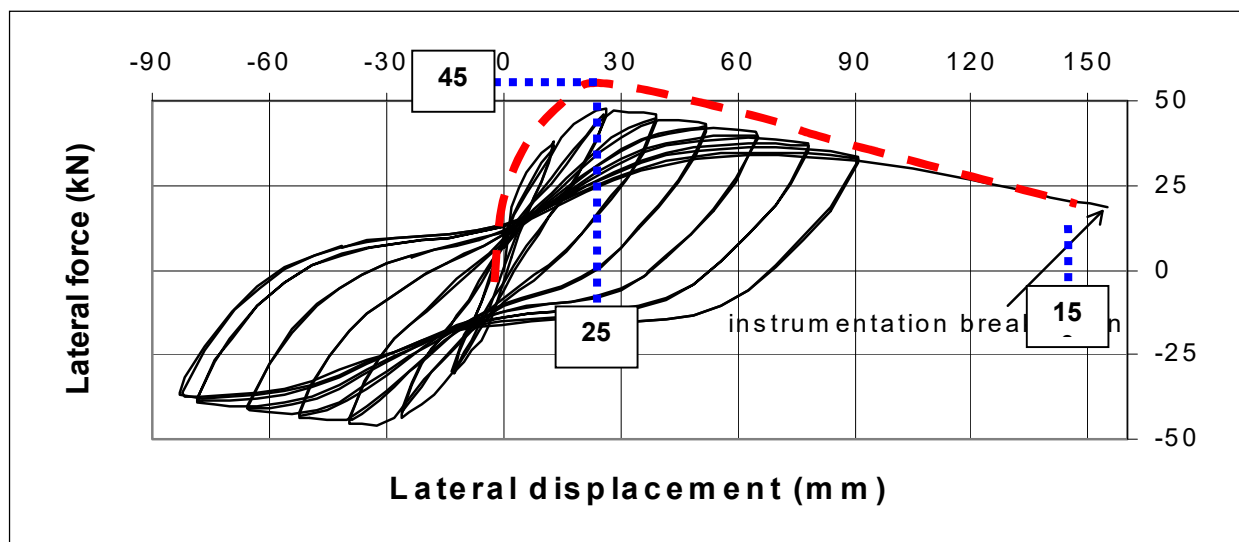


<i>Armatura Pilastro</i>	
<i>Armatura // lato superiore</i>	2 ϕ 16
<i>Armatura // lato inferiore</i>	2 ϕ 16
<i>Armatura trasversale</i>	1 ϕ 6 / 10 cm

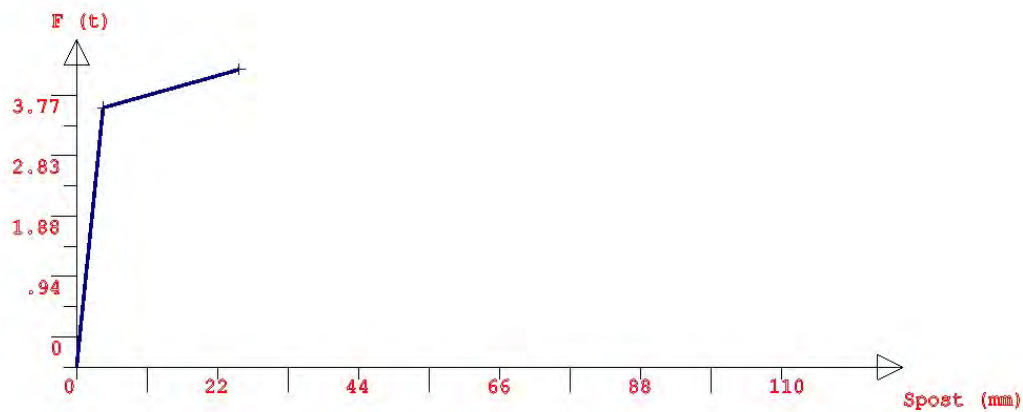
Risultato sperimentale:

La prova di carico condotta sul campione sopra indicato viene effettuata a pressoflessione retta applicando il carico assiale pari a 36 t e poi eseguendo la prova di pushover.

Di seguito viene riportato il risultato sperimentale della prova in esame:



Curva sperimentale

Analisi dei risultati :*Curva di Capacità – Analisi con CDSWin*

	<i>Soluzione sperimentale</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
<i>Lateral Force (KN)</i>	45	46,50	1,033
<i>Lateral Displacement (mm)</i>	25	24.30	0,972

(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

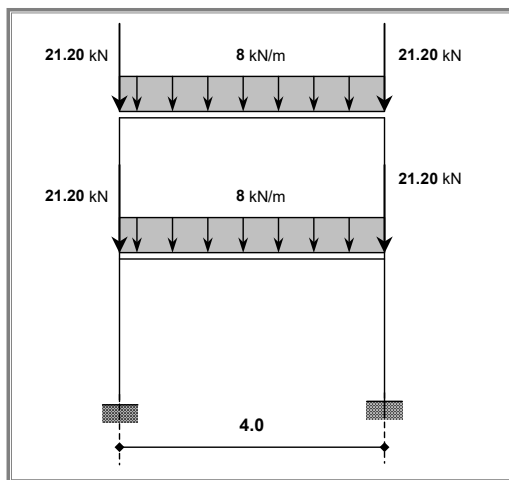
Test di verifica n°25

Telaio piano

Fonte di riferimento: Università di Roma “La Sapienza” – ECOLEADER PROJECT

Tipo di analisi: Analisi Statica non Lineare.

Schema di calcolo: Sia dato il telaio piano in fig., staticamente indeterminato. A ciascuna delle travi viene applicato un carico uniformemente distribuito di intensità pari a 8 kN/m e, in corrispondenza dei nodi, viene aggiunto un carico nodale verticale pari 21.20 kN.



Modello di calcolo: Per modellare correttamente la struttura è necessario schematizzarla come insieme di 6 elementi monodimensionali interconnessi attraverso 6 nodi. Per quanto riguarda, la condizione di vincolo dei nodi alla base si è proceduto all’inserimento di vincoli tipo incastro.

Obiettivo: Il modello, così implementato, viene sottoposto ad un’analisi di tipo pushover. Tale analisi si propone di valutare la risposta anelastica del sistema prima descritto soggetta ad una distribuzione di forze monotonicamente crescenti, confrontando la soluzione fornita dalla fonte di riferimento con quella fornita dall’analisi di CDSwin.

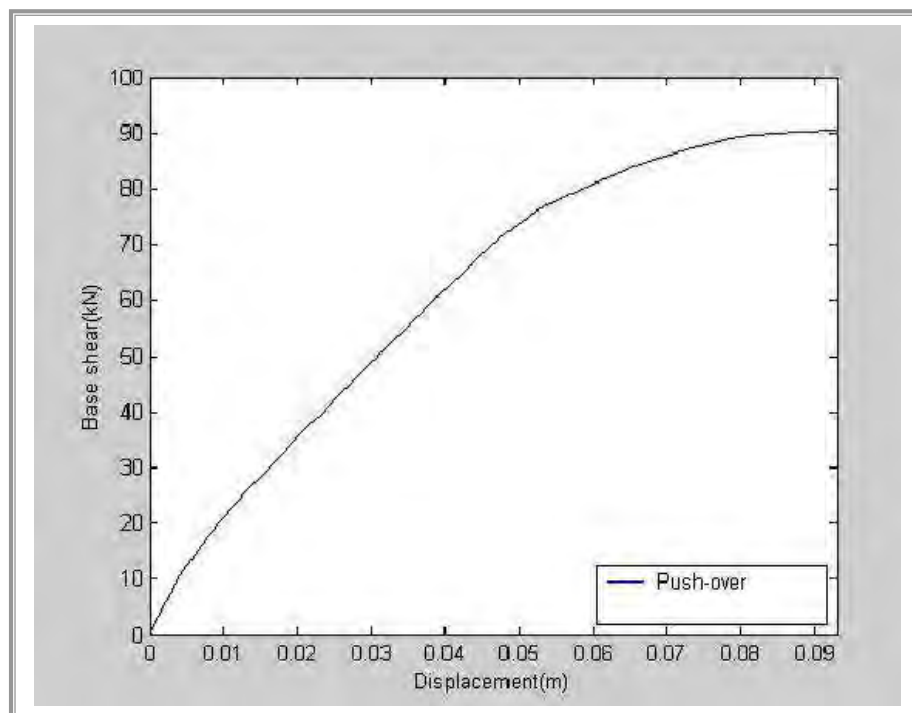
Caratteristiche meccanico-geometriche:

<i>Proprietà meccaniche cls</i>	<i>Proprietà meccaniche acciaio</i>	<i>Proprietà geometriche</i>
$f_{cm}=200 \text{ Kg/cm}^2$	$f_{yd}=5500$	Travi =26x40 cm
$E_c= 150000 \text{ Kg/cm}^2$	$E_s= 1974240 \text{ kg/cm}^2$	Pilastrini =26x26 cm
$\varepsilon_{cu}=0.004$		

<i>Armatura Pilastri</i>		
	<i>I ordine</i>	<i>II ordine</i>
<i>Armatura // lato superiore</i>	3 ϕ 14	3 ϕ 12
<i>Armatura // lato inferiore</i>	3 ϕ 14	3 ϕ 12
<i>Armatura trasversale</i>	1 ϕ 6 / 20 cm	1 ϕ 6 / 20 cm

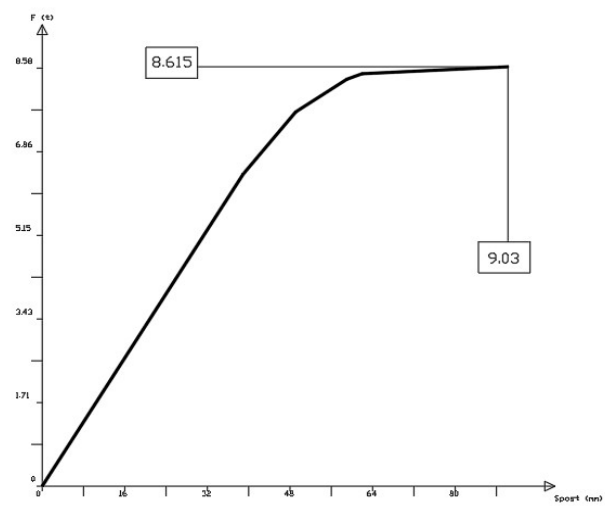
<i>Armatura Travi</i>	
<i>Armatura // lato superiore</i>	7 ϕ 14
<i>Armatura // lato inferiore</i>	4 ϕ 14
<i>Armatura trasversale</i>	1 ϕ 8 / 30 cm

Soluzione:



Curva di capacità FEAT

Analisi dei risultati: L’analisi effettuata conduce ai seguenti principali risultati:



Curva capacità CDSWin

<i>Maximum base shear</i> (KN)	90
<i>Dispalcement</i> (m)	0.09

	<i>Soluzione sperimentale</i>	<i>CDSWin</i>	<i>Ratio (*)</i>
<i>Maximum base shear (KN)</i>	90	86,15	0,957
<i>Displacement (m)</i>	0.09	0,0903	1,003
<i>Tipo di meccanismo</i>	<i>Di piano</i>	<i>Di piano</i>	//

(*): per *Ratio* si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell’elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

Test di verifica n°26

Edificio regolare

Fonte di riferimento: Università di Roma “La Sapienza” – ECOLEADER PROJECT

Tipo di analisi: Analisi Statica non Lineare.

Schema di calcolo: Dato un edificio multipiano regolare se ne vuole analizzare il comportamento in campo non lineare. Lo schema, riportato in fig. 1, rappresenta la pianta di una struttura intelaiata di 4 piani per la quale, a tutte le quote, travi e pilastri hanno dimensioni uguali e, precisamente:

	Sezione (cm x cm)
Pilastri	30 x 60
Travi	30 x 60

L'interpiano è costante per tutta l'altezza dell'edificio e pari a 3.20m.

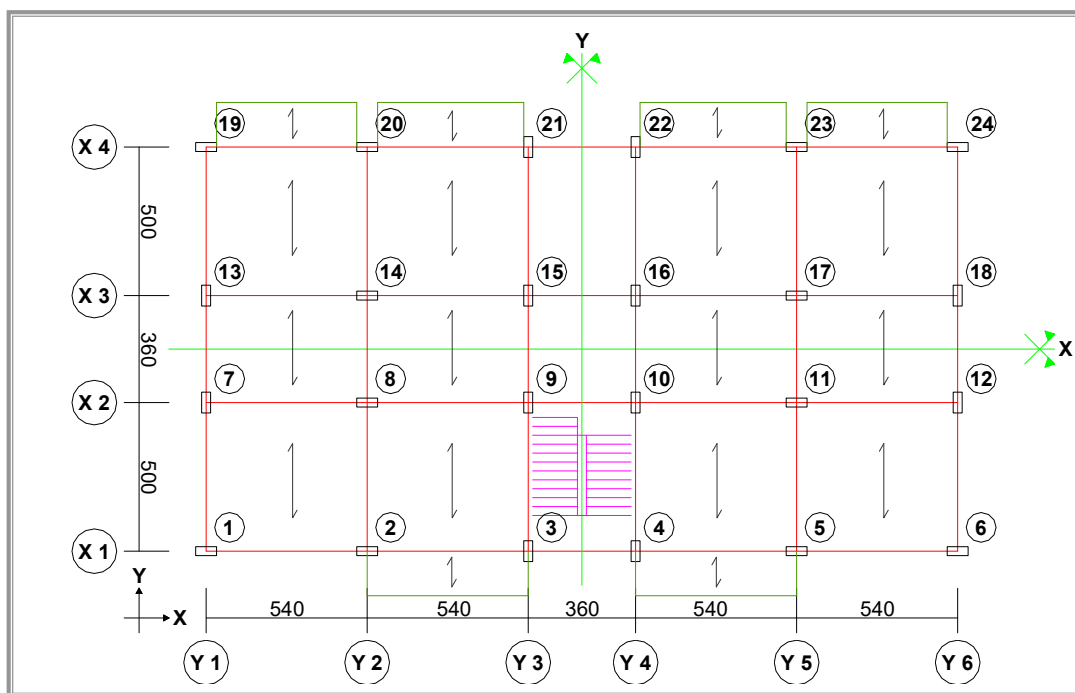


Fig. 1

Modello di calcolo: Il modello di calcolo si ottiene facilmente seguendo lo schema strutturale riportato in fig. 1.

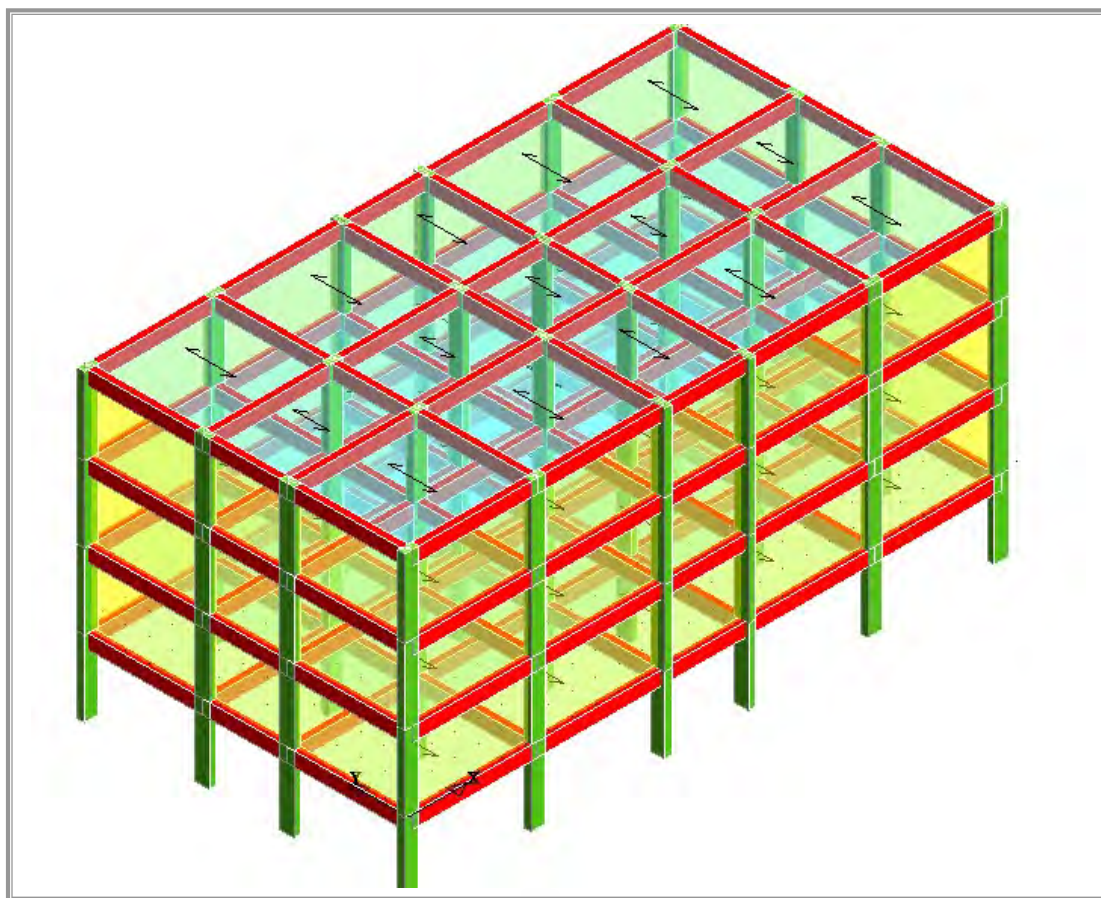
Le modalità di input prevedono, dunque, l'inserimento di aste travi e pilastri in modo da ottenere spazialmente la schematizzazione richiesta, che si riporta in fig. 2.

Per l'inserimento dei carichi verticali agenti si è fatto riferimento ai valori riportati nelle seguenti tabelle:

<i>Condizione di carico</i>	<i>kN/m²</i>
<i>P. Permanente</i>	5.88
<i>P. Tamponature</i>	2.45
<i>Q Variabile</i>	1.96
<i>P. Calcestruzzo</i>	2.45

<i>coeff. riduttivo carichi variabili</i> <i>0.3 per abitazioni e uffici</i>	<i>coeff. riduttivo contemporaneità carichi variabili</i> <i>0.8 per piani intermedi</i> <i>1 per copertura</i>
---	---

Le orditure dei solai sono quelle indicate in fig. 1.



Obiettivo: L'analisi si propone di valutare la risposta anelastica di un edificio multipiano regolare soggetto ad un'analisi di tipo push-over.

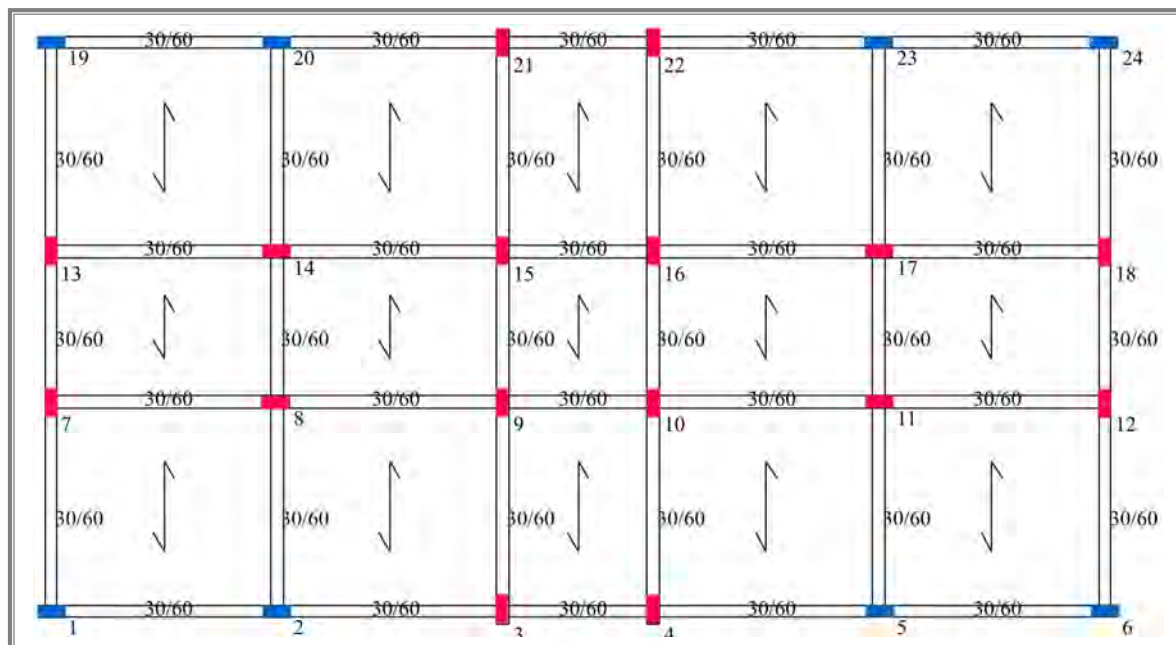
Caratteristiche meccanico-geometriche:

Proprietà meccaniche cls			Proprietà meccaniche acciaio
$f_{cm}=335 \text{ Kg/cm}^2$			$f_{yk}=5500$
$E_c=158090 \text{ Kg/cm}^2$			$E_s=2100000 \text{ kg/cm}^2$
$\varepsilon_{cu}=0.0035$ travi fon.	$\varepsilon_{cu}=0.0060$ travi elev.	$\varepsilon_{cu}=0.0065$ pilastri	

Sezioni: Con riferimento alla fig. 1 le armature longitudinali di pilastri e travi sono riportate nelle seguenti tabelle:

Pilastri		
tutte sezioni 30cm x 60cm		
nome	armatura // lato corto	armatura // lato lungo
sez.1	6+6 $\phi 16$	8+8 $\phi 16$
sez.2	8+8 $\phi 16$	9+9 $\phi 16$

Allineamento	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X4	sez.1	sez.1	sez.2	sez.2	sez.1	sez.1
X3	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2
X2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2	sez.2
X1	sez.1	sez.1	sez.2	sez.2	sez.1	sez.1



Travi			
<i>tutte alte con sezioni 30 cm x 60 cm</i>			
nome	armatura sup.	armatura inf.	armatura di parete
sez.3	8 ϕ 16	6 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.4	8 ϕ 16	5 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.5	5 ϕ 16	3 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.6	7 ϕ 16	3 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.7	6 ϕ 16	5 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.8	9 ϕ 16	9 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.9	4 ϕ 16	4 ϕ 16	3+3 ϕ 16
sez.10	4 ϕ 16	3 ϕ 16	3+3 ϕ 16

Allineamenti // asse X										
allineamento	Y1	Y2	Y2	Y3	Y3	Y4	Y4	Y5	Y5	Y6
X4	sez.3	sez.4	sez.4	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.4	sez.4	sez.3
X3	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5
X2	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.6	sez.6	sez.5
X1	sez.3	sez.4	sez.4	sez.5	sez.5	sez.5	sez.5	sez.4	sez.4	sez.3

Allineamenti // asse Y						
allineamento	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6
X4	sez.7	sez.9	sez.7	sez.7	sez.9	sez.7
X3	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
X3	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
X2	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
X2	sez.8	sez.10	sez.7	sez.7	sez.10	sez.8
X1	sez.7	sez.9	sez.7	sez.7	sez.9	sez.7

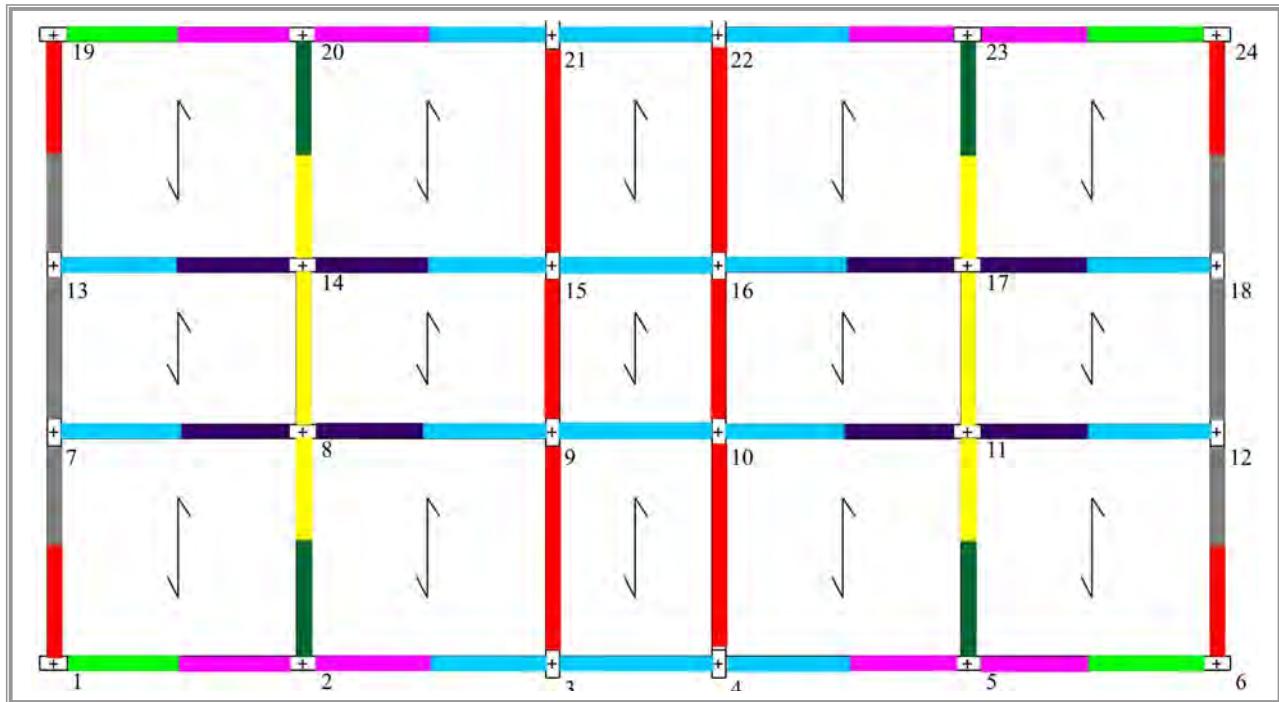


Fig. 4

Le armature trasversali sono:

- tutte le travi: staffe $\phi 8$ passo 10 cm
- tutti i pilastri: staffe $\phi 8$ passo 20 cm.

Soluzione: L'analisi effettuata conduce ai seguenti principali risultati:

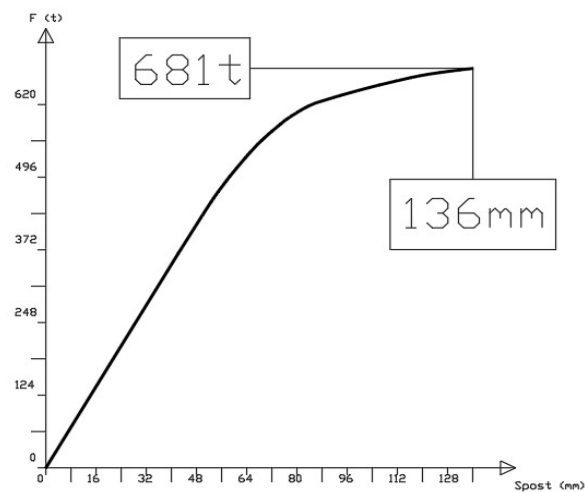


Fig. 5 – Curva Capacità CDSWIN

CDSWIN	
Maximum base shear (KN)	6810
Displcement (cm)	13,6

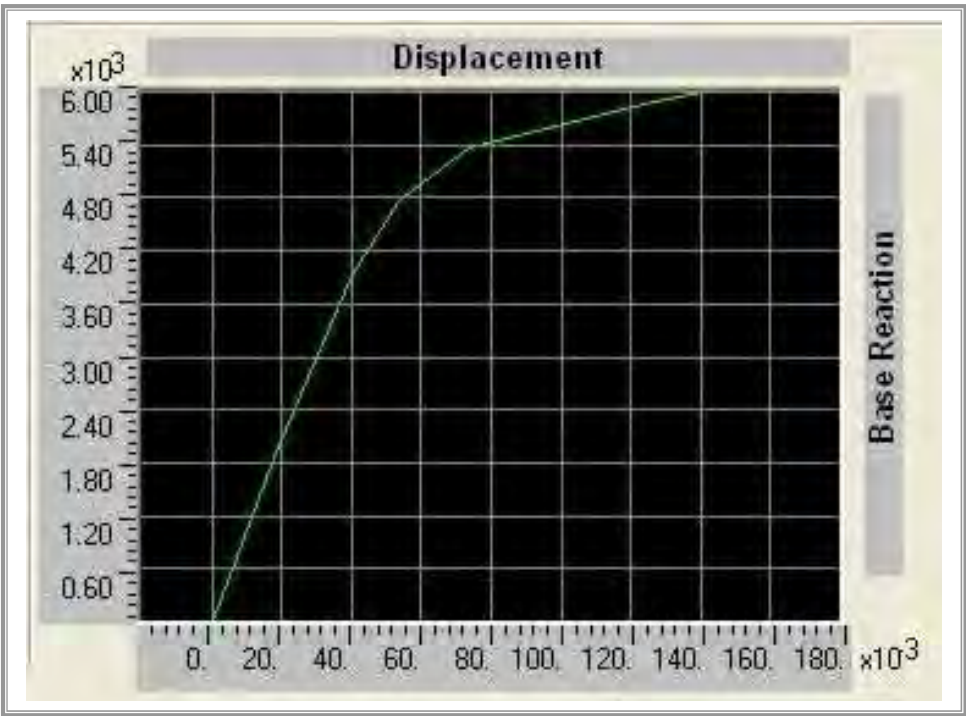


Fig. 6– Curva Capacità SAP NL

SAP NL	
Maximum base shear (KN)	6100
Displcement (cm)	14

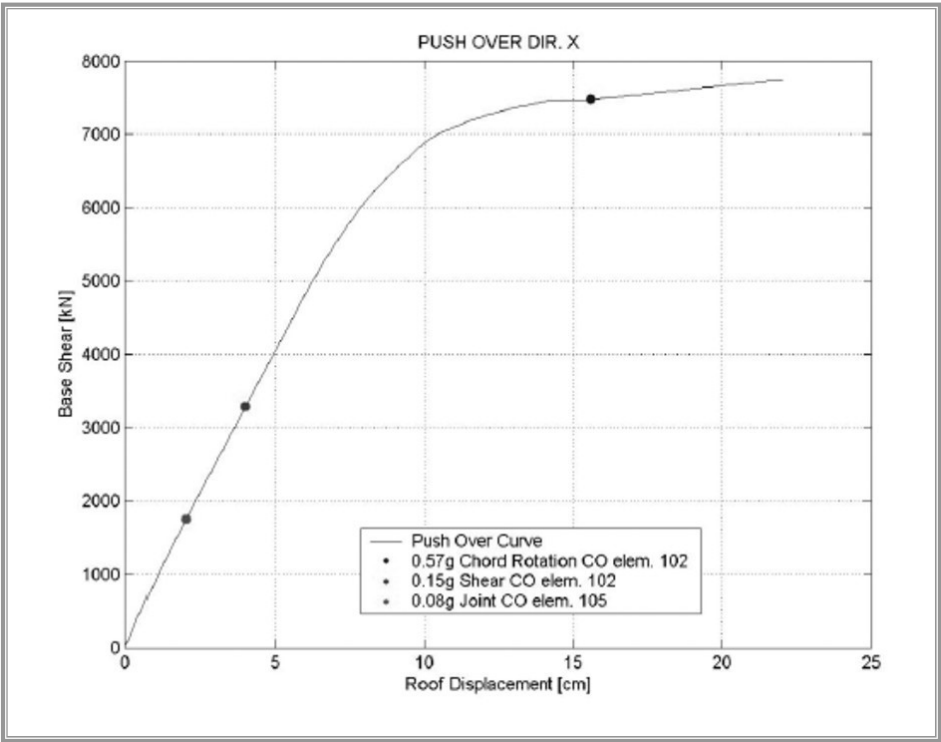


Fig. 7 – Curva Capacità OPENSEES

OPENSEES	
Maximum base shear (kN)	7500
Displacement (cm)	16

Analisi dei risultati:

Soluzione	SAP NL	OPENSEES	Var.% (*)
Maximum base shear (kN)	6100	7500	22,9
Displacement (mm)	140	160	14,3

<i>Soluzione</i>	<i>SAP NL</i>	<i>CDSWIN</i>	<i>Var.% (*)</i>
<i>Maximum base shear (KN)</i>	<i>6100</i>	<i>6810</i>	<i>11,6</i>
<i>Displacement (mm)</i>	<i>140</i>	<i>136</i>	<i>2,9</i>

(*): per Var.% si intende la variazione percentuale: $((x_1-x_2)/x_1) \cdot 100$ [%].

Test di verifica n°27

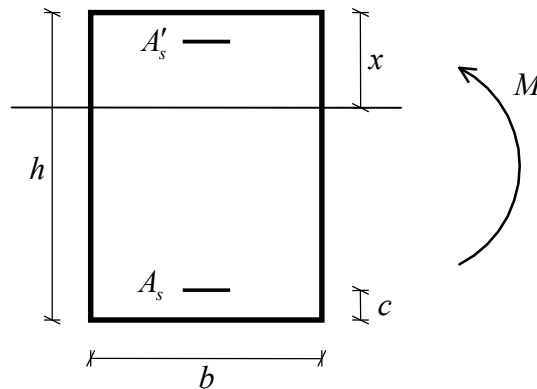
a) Verifica allo Stato Limite di Esercizio di fessurazione

Tipo di analisi: Verifica a fessurazione per flessione.

Schema di calcolo: Data una sezione resistente in c.a., di geometria ed armature note, soggetta a momento flettente M si vuole determinare l'ampiezza massima delle fessure (S.L.E. di fessurazione).

§ § §

Sia data la seguente sezione in c.a.:



$$b = 30 [cm] \quad ; \quad h = 40 [cm] \quad ; \quad c = 3.5 [cm]$$

$$A_s = 6\phi_{14} = 9.236 [cm^2] \quad ; \quad A'_s = 3\phi_{14} = 4.618 [cm^2]$$

$$E_s = 2100000 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad E_{cm} = 299619 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad f_{ct,m} = 22.1 [kg \, cm^{-2}] \quad ; \quad n = \frac{E_s}{E_c} = 15$$

Si immagini tale sezione soggetta, per le combinazioni di carico frequente e quasi permanente, ai seguenti momenti flettenti:

$$M = \begin{cases} 5625 [kg \, m] & \text{comb. frequente} \\ 5312 [kg \, m] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

Per queste sollecitazioni si ricavano le seguenti posizioni dell'asse neutro:

$$x = \begin{cases} 11.97 [cm] & \text{comb. frequente} \\ 11.95 [cm] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

Il calcolo dell'ampiezza delle fessure sarà condotto in accordo a quanto descritto nell'Eurocodice 2 al punto 7.3.4. Secondo quanto riportato nell'EC2, l'ampiezza massima attesa delle fessure è data da:

$$w_k = s_{r,\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

dove:

$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ = differenza fra le deformazioni medie di acciaio e calcestruzzo

$s_{r,max}$ = distanza massima fra le fessure

La determinazione delle deformazioni medie di acciaio e calcestruzzo si effettua in base alla seguente formulazione:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_B \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}$$

dove:

$$\sigma_s = \begin{cases} 1869 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. frequente} \\ 1764 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$k_t = \begin{cases} 0.6 & \text{comb. rara e frequente} \\ 0.4 & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$f_{ct,eff} = f_{ct,m} = \begin{cases} 22.1 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. frequente} \\ 22.1 [kg\ cm^{-2}] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$A_{c,eff} = b \cdot \min \left\{ 2.5c, \frac{h-x}{3}, \frac{h}{2} \right\} = \begin{cases} b \cdot \min \{8.75, 9.34, 20\} & \text{comb. frequente} \\ b \cdot \min \{8.75, 9.35, 20\} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 262.5 [cm^2] & \text{comb. frequente} \\ 262.5 [cm^2] & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \begin{cases} 0.035 & \text{comb. frequente} \\ 0.035 & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

$$\alpha_B = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{2100000}{299619} = 7.009$$

Sostituendo si ottiene:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \begin{cases} 6.66 \cdot 10^{-4} & \text{comb. frequente} \\ 6.91 \cdot 10^{-4} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

entrambi non minori di:

$$0.6 \frac{\sigma_s}{E_s} = \begin{cases} 5.34 \cdot 10^{-4} & \text{comb. frequente} \\ 5.04 \cdot 10^{-4} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

La distanza massima fra le fessure, invece, è data da:

$$s_{r,\max} = k_3 \left(c - \frac{\phi}{2} \right) + k_1 k_2 k_4 \frac{\phi}{\rho_{p,\text{eff}}}$$

con:

$$k_1 = 0.8 \quad ; \quad k_2 = 0.5 \quad ; \quad k_3 = 3.4 \quad ; \quad k_4 = 0.425$$

ϕ = diametro dell'armatura = 1,4 [cm]

Sostituendo si ottiene:

$$s_{r,\max} = 16.284 \text{ [cm]}$$

Ne consegue, alla fine, che l'ampiezza delle fessure è pari a:

$$w_k = s_{r,\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \begin{cases} 0.108 \text{ [mm]} & \text{comb. frequente} \\ 0.113 \text{ [mm]} & \text{comb. quasi permanente} \end{cases}$$

CDSWin fornisce il seguente tabulato:

STAMPA VERIFICHE S.L.E. - R.O. - ELEVAZIONE																							
FESSURAZIONE											FRECCHE			TENSIONI									
File	Quota	Tra	Combi	Fessu.	dist	Con	Com	Mf X	Mf Y	N	Frecc	mm	Com	Combinaz	σ lim.	σ cal.	Ce	Comb	Mf X	Mf Y	N		
In fi	In fi	cto	Caric	lim	cal	mm	cio	bin	(τ*mm)	(τ*mm)	(τ)	limite	calc	bin	Carico	Kg/cmq	Kg/cmq	nc		(τ*mm)	(τ*mm)	(τ)	
1	2,00		Rara												Rara	cls	120,0	87,2	3	1	6,4	0,0	0,0
2	2,00		Freq	0,4	0,108	163	3	1	5,8	0,0	0,0				Rara	fer	3600	2131	3	1	8,4	0,0	0,0
			Perm	0,3	0,113	163	3	1	5,3	0,0	0,0				Perm	cls	90,0	79,5	3	1	5,3	0,0	0,0

Dal confronto si evidenzia la corrispondenza dei risultati:

	Soluzione teorica	CDSWin	Ratio (*)
Comb. frequente	0,108 [mm]	0,108 [mm]	1.000
Comb. quasi permanente	0,113 [mm]	0,113 [mm]	1.000

Nota

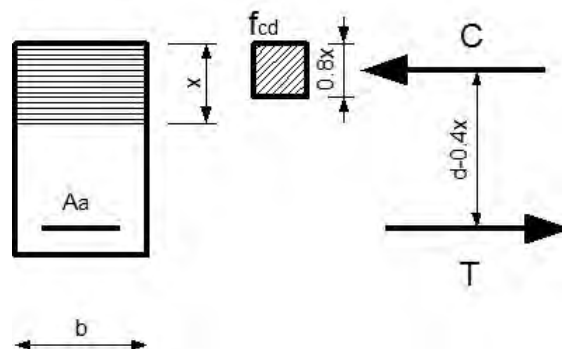
In relazione al tabulato fornita da **CDSWin**, si osservi che per la combinazione di carico RARA la corrispondente riga delle fessure risulta vuota. Questo significa che per tale combinazione di carico la verifica non è stata effettuata per scelta dell'operatore.

Nel caso, invece, che i valori fossero tutti nulli (pari a zero) allora l'ampiezza delle fessure è stata calcolata ma è nulla. In questa evenienza, comunque, non sarà nullo il valore del momento flettente.

(*): per Ratio si intende il rapporto tra il valore di output fornito dal programma, al termine dell'elaborazione, ed il valore fornito dalla soluzione teorica.

b) Determinazione del momento e del taglio resistenti per una sezione in c.a.b1) CALCOLO DEL MOMENTO RESISTENTE

Si consideri la seguente sezione in c.a.:



dove:

$$b = 30 \text{ [cm]}$$

$$h = 40 \text{ [cm]}$$

$$d = 40 - 3,5 = 36,5 \text{ [cm]}$$

$$Aa = 6 \text{ } \varnothing 14 = 9,23 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Staffe: $\varnothing 8/21$ [cm]

Calcestruzzo C20/25

Barre B450 C

$$f_{cd} = 200/1.5 \cdot 0.85 = 113 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \text{ (resistenza di progetto del calcestruzzo)}$$

$$f_{yd} = 4500/1.15 = 3913 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \text{ (resistenza di progetto dell'acciaio)}$$

Si riportano i valori ottenuti con il programma **CDSWin** con il metodo rigoroso utilizzando il legame parabola rettangolo per il calcestruzzo ed elastoplastico perfetto per l'acciaio.

Questi valori ultimi sono ottenuti mediante un modello che prevede l'integrazione numerica dello stato tensionale.

STAMPA PROGETTO S.L.U. - ELEVAZIONE																																		
VERIFICA A PRESSO-FLESSIONE																VERIFICA A TAGLIO E TORSIONE																		
File	Quota	T	C																															
Iniz	Iniz	z	Sez	o																														
Fin	Final	a	Bas	n	Co	M	Exd	N	Ed	Moltip	x/	tf	sc	Area	cmq	Co	V	Exd	V	Eyd	T	Sdu	V	Rxd	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	ALon	Staffe		
Ctg8	AmpC	t	Alt	c	mb	(t	m)	(t)	Ultimo	/d	100	100	sup	inf	mb	(t)	(t)	(t	m)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t)	(t	m)	(t	m)	Cls	Sta	cmq	Pas	Lun	Fi
1	2,00	2	1	1	2,8	0,0	4,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	7,5	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	39	49	0,0	21	42	8								
2	2,00	30	3	1	9,4	0,0	1,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	6,3	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	33	41	0,0	21	416	8								
2.8	1,00	40	5	1	2,8	0,0	4,3	22	100	28	4,6	9,2	1	0,0	-7,5	0,0	11,1	15,3	3,5	0,0	39	49	0,0	21	42	8								

Si effettuerà il controllo dei risultati per la flessione nella sezione di campata e per il taglio all'incastro.

In campata il programma fornisce per un momento di calcolo

$$M_{Ed} = 9,4 \text{ [t m]}$$

e un moltiplicatore ultimo di 1.3.

Il valore del momento resistente ultimo vale allora:

$$M_{ru} = M_{Ed} \times 1.3 = 9,4 \times 1.3 = 12,22 \text{ [t m]}$$

Si operi, ora, il confronto con il calcolo semplificato con stress block pari all'80% dell'asse neutro:

$$x = (A_a \times f_{yd}) / (0.8 \times b \times f_{cd}) = 9,23 \times 3913 / (0,8 \times 30 \times 113) = 13.32 \text{ [cm]} \text{ (asse neutro)}$$

$$M_{ru}^* = (A_a \times f_{yd}) \times (d - 0,4 x) = 9,23 \times 3913 \times (37 - 0,4 \times 13.32) / 100000 = 11,44 \text{ [t m]} \text{ (momento resistente)}$$

$$\text{Scarto } \varepsilon = (11,44 - 12,22) / 12,22 = - 6 \%$$

Come previsto, il metodo semplificato risulta leggermente a favore di sicurezza, validando il risultato ottenuto in maniera rigorosa dal software.

b2) CALCOLO DEL TAGLIO RESISTENTE

Dati di calcolo:

$$C_{tg\theta} = 2,5$$

$$\text{staffe } \varnothing 8/21 \text{ [cm]} \text{ ovvero } A_{sw} = 1 \text{ [cmq]} \quad s = 21 \text{ [cm]}$$

$$d = 36,5 \text{ [cm]}$$

All'appoggio il programma fornisce un taglio resistente pari a:

$$V_{Rdy} = 15,3 \text{ [t]}$$

Si effettua il calcolo manuale così come previsto al punto 4.1.2.3.5.2 delle NTC 2018. Il taglio trazione risulta:

$$V_{Rsd} = 15,3 \text{ [t]}$$

Il taglio compressione risulta:

$$V_{Rcd} = 18,6 \text{ [t]}$$

Nella tabella di output del **CDSWin** è riportato il taglio resistente, cioè il valore minimo tra taglio compressione e taglio trazione:

$$V_{Rd} = 15,3 \text{ [t]}$$

In tabella sono riportati anche i coefficienti di impegno del calcestruzzo e dell'acciaio. Per il calcestruzzo si ha:

$$V_{Ryd} / V_{Rcd} = 0,41$$

Mentre per l'acciaio si ha:

$$V_{Ryd} / V_{Rsd} = 0,49$$

Test di verifica n°28

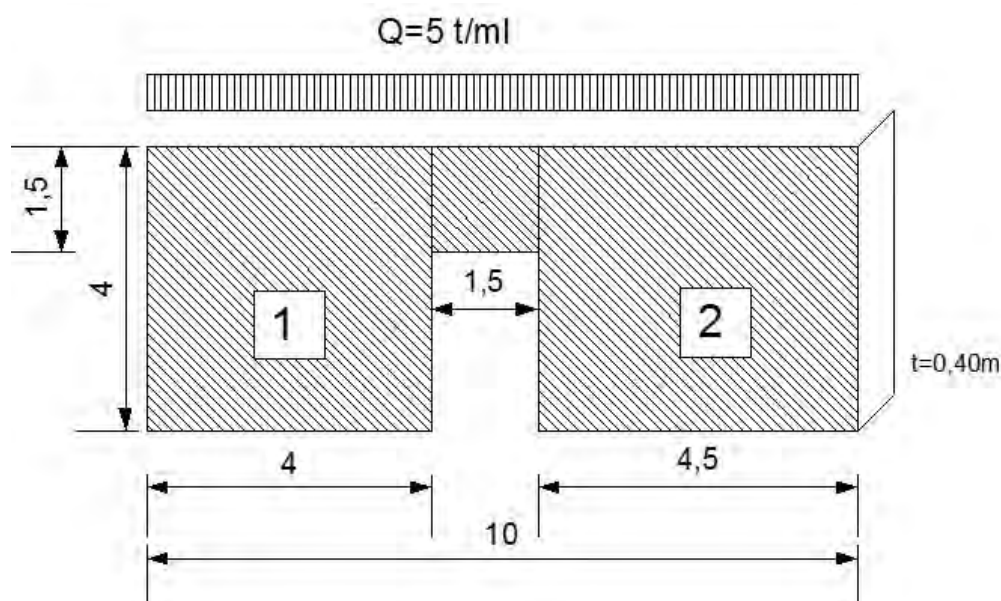
Analisi sismica lineare e non lineare (push over) di una facciata in muratura

Tipo di analisi: Lineare e non lineare (Push Over) di una facciata in muratura ad una sola elevazione dello spessore di 0,40 ml con un carico verticale derivante dall'impalcato di 5 t/ml.

Obiettivo: Il test consiste nel confrontare i risultati ottenuti da una analisi sismica lineare ed una non lineare effettuata con il CDSWin – CDMa Win con i risultati ottenuti direttamente con calcoli manuali.

§ § §

Sia data la seguente facciata in muratura:



CARATTERISTICHE DELLE MURATURE

$f_k = 20 \text{ kg/cm}^2$ (resistenza a compressione)

$\tau_k = 0,91 \text{ kg/cm}^2$

$E = 20000 \text{ kg/cm}^2$

$G = 8000 \text{ kg/cm}^2$

$\gamma = 1,9 \text{ t/mc}$

$\delta_{bSLU} = 0,006$ (deformazione ultima collasso flessionale)

$\delta_{sSLU} = 0,004$ (deformazione ultima collasso a taglio)

Livello di conoscenza adeguata FC = 1,20

$\gamma_M = 2$ coefficiente parziale muratura combinazione sismica

RESISTENZE DI PROGETTO**Analisi lineare:**

$$f_d = 20 / (2 \times 1,2) = 8,33 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_d = 0,91 / (2 \times 1,2) = 0,38 \text{ kg/cm}^2$$

Analisi non lineare:

$$f = 20 / 1,2 = 16,67 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau = 0,91 / 1,2 = 0,76 \text{ kg/cm}^2$$

VALUTAZIONE DELLE MASSE COMPLESSIVE

Il programma, in automatico, fornisce le seguenti grandezze:

BARICENTRI MASSE E RIGIDENZE								
PIANO N.ro	QUOTA (m)	PESO (t)	XG (m)	YG (m)	XR (m)	YR (m)	DX (m)	DY (m)
1	4,00	64,63	5,00	0,00	5,04	0,00	0,04	0,00

Valutazione manuale

Nel valutare le masse complessive che partecipano al tagliante sismico, le pareti si considerano al 50% per cui:

$$W_g = 0,40 \times 1,90 \times (4 \times 4/2 + 4,5 \times 4/2 + 1,5 \times 1,5) = 14,63 \text{ t}$$

Mentre la massa portata dovuta al solaio è data da:

$$W_q = 5 \times 10 = 50 \text{ t}$$

Di conseguenza:

$$W_t = W_g + W_q = 64,63 \text{ t}$$

valore identico a quello ottenuto dal software.

ANALISI ELASTICA LINEARE SISMICA MODALE

Il programma fornisce i seguenti risultati:

VERIFICA SISMICA GLOBALE MASCHI MURARI - QUOTA N.ro: 1										
VERIFICA GLOBALE MASCHI MURARI										
Muro N.ro	Modo di collasso	Cmb	Coeff. sicur.	Nru (t)	Vru (t)	Mru (tm)	Nd (t)	Vd (t)	Md (tm)	TirPass (t)
1	FLESSIONE	15	1,80	-36,76	17,48	49,26	-36,76	6,85	27,41	0,00
2	FLESSIONE	11	1,77	-40,78	19,52	61,95	-40,78	8,76	35,04	0,00

Valutazione manuale

Per i meccanismi flessionali si considera la compressione media al piede del pannello mentre per le verifiche del meccanismo a taglio per fessurazione diagonale si considera la compressione media nella zona centrale del pannello.

Muro 1:

$$N_{p.p.} = 1,90 \times 4 \times 4 \times 0,4 = 12,16 \text{ t}$$

$$N_{p.p. \text{ architrave}} = \frac{1}{2} \times 1,90 \times 1,5 \times 1,5 \times 0,4 = 0,85 \text{ t}$$

$$N_q \text{ solaio} = (4 + 1,50/2) \times 5 = 23,75 \text{ t}$$

$$N_{\text{somma}} = 36,760 \text{ t}$$

$$\sigma_0 = 36760 / (40 \times 400) = 2,29 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede pannello)}$$

$$M_{ru} = 400^2 \times 40 \times 2,29/2 \times (1 - 2,29/(0,85 \times 8,33)) = 4957953 \text{ kgcm} = 49,58 \text{ tm}$$

$$l/h = 1$$

$$\sigma_0 = 1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 400 \times 40 \times 1,5 \times 0,38/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,38))^{1/2} = 17794 \text{ kg} = 17,79 \text{ t}$$

Muro 2:

$$N_{p.p.} = 1,90 \times 4,50 \times 4 \times 0,4 = 13,68 \text{ t}$$

$$N_{p.p. \text{ architrave}} = \frac{1}{2} \times 1,90 \times 1,5 \times 1,5 \times 0,4 = 0,85 \text{ t}$$

$$N_q \text{ solaio} = (4,50 + 1,50/2) \times 5 = 26,25 \text{ t}$$

$$N_{\text{somma}} = 40,780 \text{ t}$$

$$\sigma_0 = 40780/(40 \times 450) = 2,27 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede pannello)}$$

$$M_{ru} = 450^2 \times 40 \times 2,27/2 \times (1 - 2,27/(0,85 \times 8,33)) = 6246075 \text{ kgcm} = 62,46 \text{ tm}$$

$$h/l=0,825 \text{ si assume } b=1$$

$$\sigma_0=1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 450 \times 40 \times 1,5 \times 0,38/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,38))^{1/2} = 20019 \text{ kg} = 20,02 \text{ t}$$

CONFRONTO

MURO n.	Mru CDS	Mru TEST	scarto %	Vru CDS	Vru TEST	scarto %
1	49,26	49,58	-0,65	17,48	17,79	-1,77
2	61,95	62,46	-0,83	19,52	20,02	-2,56

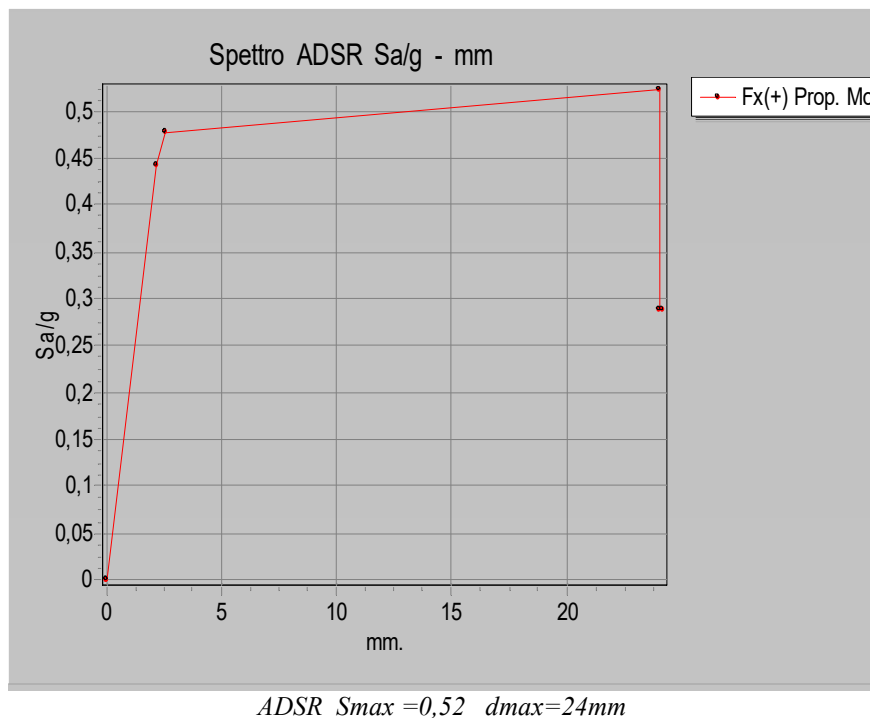
MURO n.	Nd CDS	Nd TEST	scarto %
1	36,76	36,76	0,00
2	40,78	40,78	0,00

Gli scarti sono inferiori al 1% per i momenti ed al 2,6% per i tagli e sempre A VANTAGGIO DI SICUREZZA.

ANALISI STATICA NON LINEARE (PUSH OVER)

Il programma, in automatico, fornisce le seguenti grandezze:

RISULTATI GENERALI PUSH-OVER			
PUSH-OVER N.ro	1 -	Distrib.Forze Fx(+) Prop.Modo	
Angolo Ingr. Sisma (Grd)	0	Numero collassi totali	2
Numero passo Resist.Max.	5	Numero passi significativi	7
Massa SDOF (t)	64,63	Taglio alla base max. (t)	33,79
Coeff. Partecipazione	1,00	Resistenza SDOF (t)	32,32
Rigidezza SDOF (t/m)	13020,63	Spostam. Snervam. SDOF mm	2
Periodo SDOF (sec)	0,14	Rapporto di incrudimento	0,000
Rapporto Alfau/alfa1	8814,116	Fattore struttura	3,708
Coeff Smorzam.Equival.(%)	33	Duttilità	9,681

Valutazione manuale

Si valutino i valori resistenti utilizzati per l'analisi non lineare.

Muro 1:

$$\sigma_0 = 2,29 \text{ kg/cm}^2 \text{ (piede setto)}$$

$$M_{ru} = 400^2 \times 40 \times 2,29/2 \times (1 - 2,29/(0,85 \times 16,67)) = 6143687 \text{ kgcm} = 61,44 \text{ tm}$$

$$l/h = 1$$

$$\sigma_0 = 1,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_{ru} = 400 \times 40 \times 1,5 \times 0,76/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,76))^{1/2} = 28278 \text{ kg} = 28,28 \text{ t}$$

Muro 2:

$\sigma_0 = 2,27 \text{ kg/cmq}$ (piede setto)

$$M_{ru} = 450^2 \times 40 \times 2,27/2 \times (1 - 2,27/(0,85 \times 16,67)) = 7720671 \text{ kgcm} = 77,21 \text{ tm}$$

$h/l=0,825$ si assume $b=1$

$\sigma_0=1,6 \text{ kg/cmq}$

$$V_{ru} = 450 \times 40 \times 1,5 \times 0,76/1,0 \times (1 + 1,6/(1,5 \times 0,76))^{1/2} = 31813 \text{ kg} = 31,81 \text{ t}$$

Per stimare in maniera affidabile il limite superiore del tagliante alla base ultimo, si ipotizzi che le pareti raggiungano i valori ultimi di resistenza contemporaneamente per cui:

TAGLIANTE ULTIMO:

- Per meccanismo flettente: $V_{b1} = (M_{ru1} + M_{ru2})/H = (61,44 + 77,21)/4 = 34,66 \text{ t}$
- Per meccanismo tagliante: $V_{b2} = V_{ru1} + V_{ru2} = (28,28 + 31,81) = 60,09 \text{ t}$

Il meccanismo ultimo della facciata è di tipo flessionale per cui:

$$V_b = V_{b1} = 34,66 \text{ t}$$

$$S_a = V_b/W = a_g/g = 34,66/64,63 = 0,536$$

$$d_{slu} = 0,006 \times 4000 = 24 \text{ mm (spostamento ultimo per meccanismo flessionale)}$$

CONFRONTO

GRANDEZZA	CDS	TEST	scarto %
V_b	33,79	34,66	-2,5
S_a	0,52	0,54	-3,7
d_{slu}	24 mm	24 mm	0,0

I risultati dell'analisi risultano pienamente validati dal confronto effettuato.

Test di verifica n°29

Test pratico di validazione numerica per la progettazione dei rinforzi in FRP

Premessa

Il calcolo dei rinforzi in FRP viene effettuato con riferimento al documento CNR DT 200 /2004 ed alle Linee Guida del C.S.LL.PP. per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Collaudo di Interventi di Rinforzo di strutture di c.a., c.a.p. e muratura mediante FRP.

A causa delle modifiche apportate dalla Circolare Esplicativa 2019 rispetto alla precedente del 2009 riguardo la verifica di resistenza dei nodi trave-pilastro, si analizzano separatamente due casi:

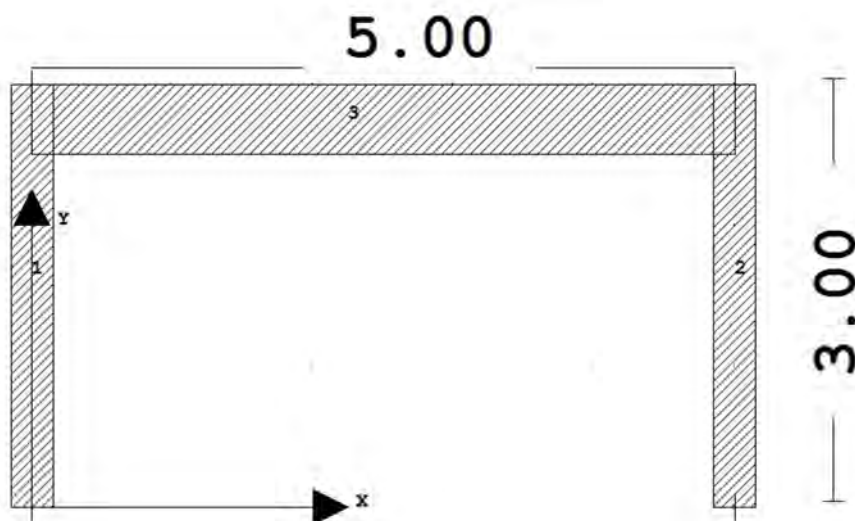
-calcolo con versioni precedenti alla release 2019 del *CDSWin* o con *CDSWin 2019* senza l'attivazione della voce *Parametri Circolare 2019*

-calcolo con *CDSWin 2019* e attivazione della voce *Parametri Circolare 2019*

Modello

I test vengono svolti su un semplice portale in calcestruzzo armato, valutando l'incremento di resistenza a taglio in corrispondenza di un estremo del pannello di nodo trave-pilastro.

Un ulteriore test è stato svolto per valutare l'incremento di duttilità derivante dal confinamento della zona critica di un pilastro.



Sezioni rettangolari:

Trave: B=30 cm H=50 cm

Pilastro: B=40 cm H=30 cm

Copriferro c=20mm

Calcestruzzo C20/25

Acciaio B450C

Spessore solaio=20cm

FIBRE DI CARBONIO FRP TRAVE

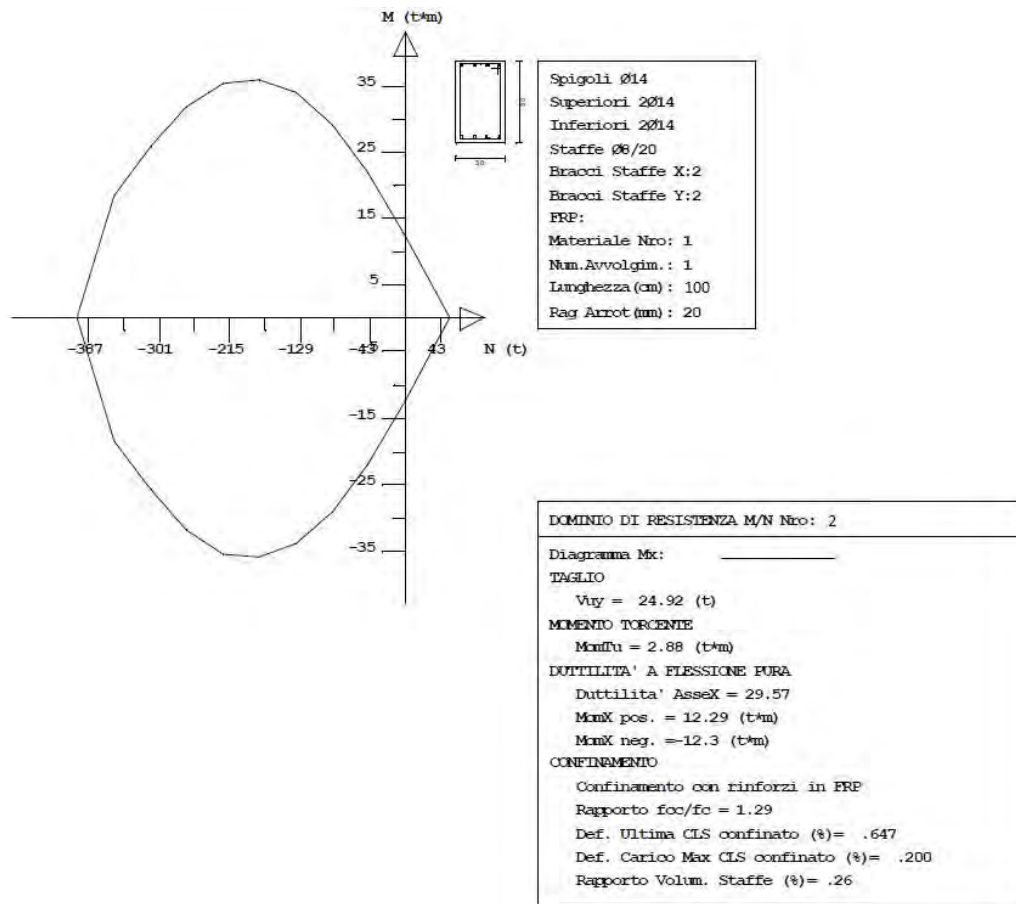
CARATTERISTICHE MECCANICHE	VALORI
TIPO	Tessuto MONODIREZIONALE in fibre di carbonio
Grammatura	300 g/ m ²
Massa volumica (kg/m³)	1820
Spessore equivalente di tessuto secco (mm)	0.165
Area resistente per unità di larghezza (mm²/m)	165
Resistenza meccanica a trazione (N/mm²)	3000
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m)	495
Modulo elastico a trazione (N/mm²)	300.000
Allungamento a rottura (%) ϵ_{fk}	1.3%
η (tabella 3.4) CNR-DT 200/04	0.85
γ_{fd} rottura per delaminazione (tabella 3.2)	1.2
γ_{fd} Rottura fibra (tabella 3.2)	1.1
γ_{RD} Verifiche a taglio (tabella 3.3)	1.2

FIBRE DI CARBONIO FRP PILASTRO

CARATTERISTICHE MECCANICHE	VALORI
TIPO	Tessuto QUADRIASSIALE in fibre di carbonio
Grammatura	300 g/ m ²
Massa volumica (kg/m³)	1820
Spessore equivalente di tessuto secco (mm)	0.165
Area resistente per unità di larghezza (mm²/m)	165
Resistenza meccanica a trazione (N/mm²)	3000
Carico massimo per unità di larghezza (kN/m)	495
Modulo elastico a trazione (N/mm²)	300.000
Allungamento a rottura (%) ϵ_{fk}	1.3%
η (tabella 3.4) CNR-DT 200/04	0.85
γ_{fd} rottura per delaminazione (tabella 3.2)	1.2
γ_{fd} Rottura fibra (tabella 3.2)	1.1
γ_{RD} Verifiche a taglio (tabella 3.3)	1.2

Test 1: Incremento del taglio resistente in corrispondenza di un estremo della trave (Circ2009 e Circ2019)

In funzione del singolo strato di FRP incollato sulla trave, il software fornisce il seguente dominio (valido a prescindere dalla Circolare Esplicativa considerata):



Domino di resistenza calcolato dal programma

Il taglio resistente in corrispondenza di un estremo della trave vale quindi:

$$V_{uy} = 24.92 \text{ t}$$

Si calcola analiticamente il taglio resistente “meccanismo a trazione”, utilizzando un’inclinazione delle fessure diversa per il contributo delle fibre FRP e per il contributo delle staffe.

Contributo staffe inclinazione del puntone $\cot(\theta) = 2.5$:

$$V_{Rdw} = 0.9 \cdot f_{ydw} \cdot A_{st} \cdot \frac{d}{p} \cdot \cot \vartheta = 0.9 \cdot 3913 \cdot 1.00 \cdot \frac{46.5}{20} \cdot 2.5 = 20570 \text{ kg}$$

Contributo FRP (Resistenza massima di calcolo fibra) $\cot(\theta) = 1$:

$$f_d = E_f \cdot \varepsilon_{fk} \cdot \eta / \gamma_{fd} = 300000 \cdot 0.013 \cdot 0.85 / 1.10 = 30136 \text{ kg/cmq}$$

Meccanismo di delaminazione (Linee guida 3.1):

$$l_e = \sqrt{\frac{E_f \cdot t_f}{2 \cdot f_{ctm}}} = \sqrt{\frac{300000 \cdot 0.165}{2 \cdot 1.03}} = 155 \text{ mm}$$

(unità di misura N e mm)

$K_b=1$ in sicurezza

$$f_{fd} = \frac{0.24}{\gamma_{f,d} \cdot \sqrt{\gamma_c}} \sqrt{\frac{E_f \cdot k_b \sqrt{f_{ck} \cdot f_{ctm}}}{t_f}} = \frac{0.24}{1.2 \cdot \sqrt{1.5}} \sqrt{\frac{300000 \cdot 1 \cdot \sqrt{20 \cdot 1.03}}{t_f}} = 469.2 \text{ N/mm}^2 = 4692 \text{ kg/cm}^2$$

$$h_{min} = 46.5 - 20 = 26.5 \text{ cm (caso con FRP ad U trave emergente)}$$

$$\varphi_r = 0.2 + 1.6 \cdot \frac{r_c}{b_w} = 0.2 + 1.6 \cdot \frac{2}{30} = 0.306 \text{ Linee guida (3.25)}$$

$$f_{fed} = f_{df} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_e}{\square_{min}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{15.5}{26.5}\right)\right) \text{ Linee guida (3.23)}$$

Per una fasciatura continua ($w_f/p_f = 1$) e ortogonale all'asse ($\cotg\beta = 1$) si ottiene:

$$V_{Rdf} = \frac{1}{\gamma_{Rd}} 0.9 \cdot d \cdot f_{fed} \cdot 2 \cdot t_f \cdot \frac{w_f}{p_f} = \frac{1}{1.2} 0.9 \cdot 46.5 \cdot 3777 \cdot 2 \cdot 0.0165 \cdot 1 = 4347 \text{ kg Linee guida (3.21)}$$

Nell'ipotesi di considerare l'inclinazione delle fessure per il contributo FRP fissata a 45° :

$$V_{rt} = (V_{Rdw} + V_{Rdf}) = (20570 + 4347) = 24917 \text{ kg} = 24.92 \text{ t}$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 2, valore V_{uy}).

Test 2: Incremento di resistenza del pannello di nodo trave-pilastro

Al fine di tenere conto del contributo delle fibre, si utilizza il meccanismo resistente dei nodi non fessurati previsto dalla Circolare Esplicativa 2009 e successivamente modificato nella Circolare Esplicativa 2019. Si riportano entrambi i casi.

Circolare Esplicativa 2009

Il modello utilizzato prevede la presenza di elementi resistenti a trazione in parallelo alla resistenza del calcestruzzo, in modo tale da limitare le tensioni diagonali al valore $0.3\sqrt{f_c}$.

Riscrivendo opportunamente la formula C8.7.2.2, si ottiene:

$$\left| \frac{N}{2A_g} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_g}\right)^2 + \left(\frac{V_n}{A_g}\right)^2} - \frac{A_{sh} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \square_{jw}} \right| \leq 0.3\sqrt{f_c}$$

Al primo membro, il primo termine è uguale alla resistenza a trazione del calcestruzzo, il secondo termine rappresenta la resistenza a trazione addizionale dovuta al presidio utilizzato, dove:

- A_g indica la sezione orizzontale del nodo, quindi l'area del pilastro $30 \times 40 = 1200 \text{ cm}^2$

- V_n indica il taglio totale agente sul nodo, dato dalla somma tra il taglio derivante dal pilastro superiore e quello dovuto alla sollecitazione di trazione nell'armatura longitudinale superiore della trave

- A_{sh} è l'area complessiva delle staffe o del tessuto presente sul nodo di altezza h_{jw} , per cui nel caso di FRP quadri assiale:

$$A_{sh} = h_{jw} \times (t_f + 2 \times t_f \times \cos(45^\circ))$$

- Il valore della resistenza f_{ywd} viene assunto pari alla resistenza del sistema FRP, limitando la deformazione massima al 0.4%, come previsto al punto 3.7.3.2.4 *Nodi* delle linee guida C.S.LL.PP.

$$f_{ywd} = 0.004 \times 3000000 = 12000 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{sh} \times f_{ywd} = 50 \times (0.0165 + 2 \times 0.0165 \times 0.71) \times 12000 = 23950 \text{ kg}$$

Questo equivale a una resistenza a trazione aggiuntiva pari a:

$$\frac{A_{s\Box} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \Box_{jw}} = \frac{23950}{30 \cdot 50} = 15.97 \text{ kg/cmq}$$

I valori forniti dal software si leggono nella seguente tabella:

RISULTATI VERIFICHE NODI CLS - PUSH N.ro: 5 - Fx(+) Prop.Massa														
IDENTIFICATIVO			DIREZIONE 'X'									DIREZIONE 'Y'		
Filo N.ro	Quota (m)	Nod3d Nro	Nsup (t)	Coll Nodo	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo kg/cmq	SgmTr kg/cmq	RcLim	RtLim	DeltRt	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo kg/cmq
1	3,00	2	0,0	NO	0,0	0,0	0,0	66,7	11,0	15,9				
2	3,00	4	0,0	NO	0,0	23,5	-19,6	3,7	66,7	11,0	15,9			

Il contributo dei rinforzi vale 15.9 kg/cmq (vedi nella tabella *DeltRt*), pari alla resistenza a trazione aggiuntiva calcolata manualmente.

Effettuando i calcoli manuali e assumendo la trazione in assenza di rinforzo pari a 19,6 kg/cmq uguale alla compressione fornita dal software (vedi nella tabella *SgmCo*), si ottiene come sforzo di trazione sul calcestruzzo:

$$\left| \frac{N}{2A_g} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_g}\right)^2 + \left(\frac{V_n}{A_g}\right)^2} \right| - \frac{A_{s\Box} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \Box_{jw}} = 19,6 - 15,9 = 3.7 \text{ kg/cmq}$$

valore identico a quello fornito dal software (vedi nella tabella *SgmTr*).

Circolare Esplicativa 2019

In questo caso si utilizza la formula C8.7.2.11:

$$\left| \frac{N}{2A_j} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_j}\right)^2 + \left(\frac{V_j}{A_j}\right)^2} \right| - \frac{A_{s\Box} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \Box_{jw}} \leq 0.3\sqrt{f_c}$$

All'apparenza uguale alla formula della precedente circolare ad eccezione del pedice j al primo termine, in tal caso aumenta il taglio agente e diminuisce l'area da considerare, infatti:

$-A_j = b_j x h_{jc} = 23 \times 40 = 920 \text{ cmq}$ (cfr. §7.4.4.3.1 della norma)

$-V_j$ indica il taglio totale agente sul nodo, dato dalla somma tra il taglio derivante dal pilastro superiore e quello dovuto alle sollecitazioni sia di trazione sia di compressione nell'armatura longitudinale superiore della trave

In tal caso uno strato di FRP non è sufficiente per soddisfare la verifica, occorre quindi aggiungerne un secondo, ottenendo una resistenza a trazione aggiuntiva pari al doppio della precedente:

$$\frac{A_{s\Box} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \Box_{jw}} = \frac{47900}{30 \cdot 50} = 31.94 \text{ kg/cmq}$$

I valori forniti dal software si leggono nella seguente tabella:

RISULTATI VERIFICHE NODI CLS - PUSH N.ro: 5 - Fx(+) Prop.Massa																		
IDENTIFICATIVO			DIREZIONE 'X'									DIREZIONE 'Y'						
Filo N.ro	Quota (m)	Nod3d Nro	Nsup (t)	Coll Nodo	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo	SgmTr	RcLim	RtLim	DeltRt	TaglSup (t)	TrazAf (t)	SgmCo	SgmTr	RcLim	RtLim	DeltRt
1	3.00	2	0.0	NO	0.0	29.3	-31.8	0.0	66.7	11.0	31.9							
2	3.00	4	0.0	NO	0.0	29.3	-31.9	0.0	66.7	11.0	31.9							

Il contributo dei rinforzi vale 31.9 kg/cmq (vedi nella tabella *DeltRt*), pari alla resistenza a trazione aggiuntiva calcolata manualmente.

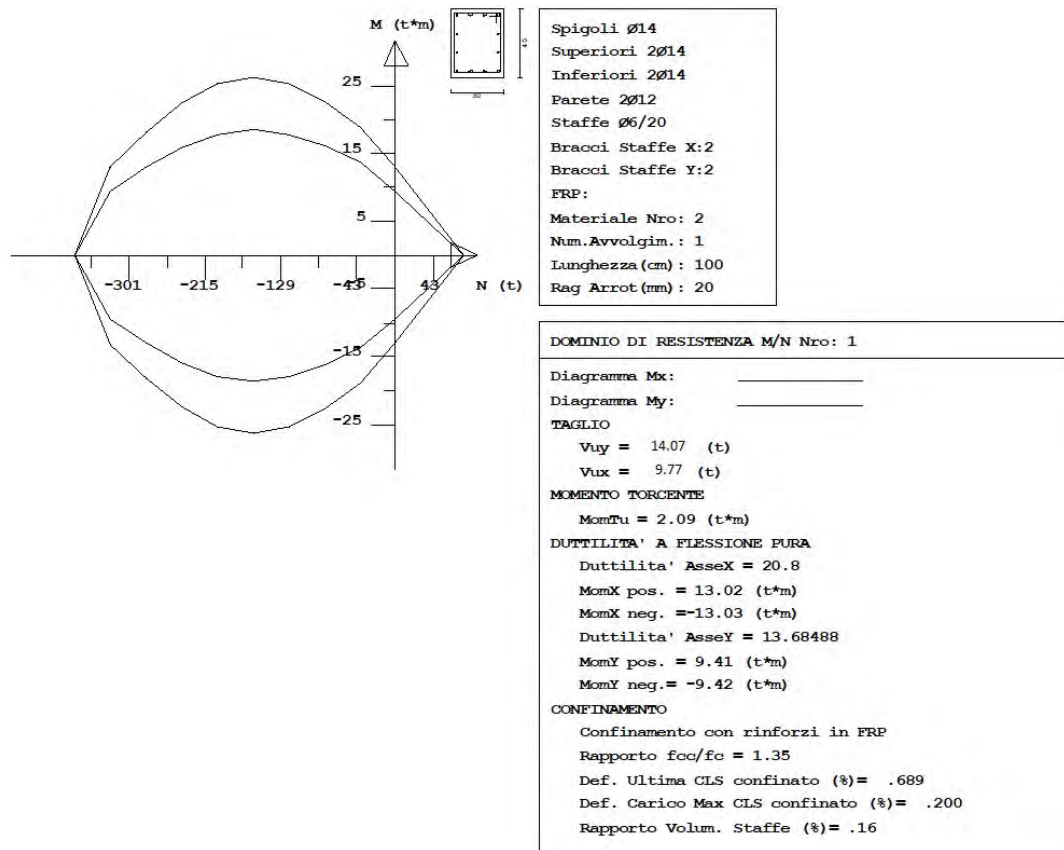
Effettuando i calcoli manuali e assumendo la trazione in assenza di rinforzo pari a 31,9 kg/cmq uguale alla compressione fornita dal software (vedi nella tabella *SgmCo*), si ottiene, come calcolato dal software (vedi nella tabella *SgmTr*), lo sforzo di trazione nullo sul calcestruzzo:

$$\left| \frac{N}{2A_j} - \sqrt{\left(\frac{N}{2A_j}\right)^2 + \left(\frac{V_j}{A_j}\right)^2} \right| - \frac{A_{s\Box} \cdot f_{ywd}}{b_j \cdot \Box_{jw}} = 31.9 - 31.9 = 0 \text{ kg/cmq}$$

Test 3: Incremento di duttilità per confinamento del pannello di nodo trave-pilastro

Circolare Esplicativa 2009

Avendo disposto un singolo strato di FRP alle estremità del pilastro per soddisfare la verifica del nodo del test 2, il software fornisce in questo caso dei risultati diversi:



La deformazione ultima del calcestruzzo vale:

$$\varepsilon_{ccu} = 0.68\%$$

Per la valutazione del confinamento del composito si fa riferimento alle Linee Guida del C.S. LL.PP. capitolo 3.5: *Confinamento*.

$$\varepsilon_{fd,rid} = \min \left\{ \eta_a \cdot \frac{\varepsilon_{fk}}{\gamma_f} = 0.95 \frac{0.013}{1.1} = 0.0112 \right. \\ \left. 0.6 \cdot \varepsilon_{fk} = 0.0078 \right\} = 0.0078 \text{ Deformazione ridotta (cfr. Linee Guida 3.44)}$$

$$\rho_f = \frac{2 \cdot t_f \cdot (b + \square) \cdot b_f}{b \cdot h \cdot p_f} = \frac{2 \cdot 0.0165 \cdot (30 + 4) \cdot 2}{30 \cdot 40} = 0.001925 ; b_f = p_f - fasciatura continua \text{ (cfr. Linee Guida 3.41)}$$

$$b' = b - 2 \cdot r_c = 30 - 2 \cdot 2 = 26 \text{ cm}$$

$$\square' = \square - 2 \cdot r_c = 40 - 2 \cdot 2 = 36 \text{ cm}$$

$$K_{\square} = 1 - \frac{b'^2 + \square'^2}{3A_g} = 1 - \frac{26^2 + 36^2}{3 \cdot 30 \cdot 40} = 0.452 \text{ (cfr. Linee Guida 3.42)}$$

Pressione di confinamento (cfr. Linee Guida 3.34):

$$f_l = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{fd,rid} = \frac{1}{2} \cdot 0.001925 \cdot 3000000 \cdot 0.0078 = 22.523 \text{ kg/cm}^2$$

Cfr. Linee Guida 3.33 3.35:

$$f_{leff} = f_l \cdot k_{\square} \cdot k_v \cdot k_{\alpha} = 22.523 \cdot 0.452 \cdot 1 \cdot 1 = 10.185 \text{ kg/cm}^2$$

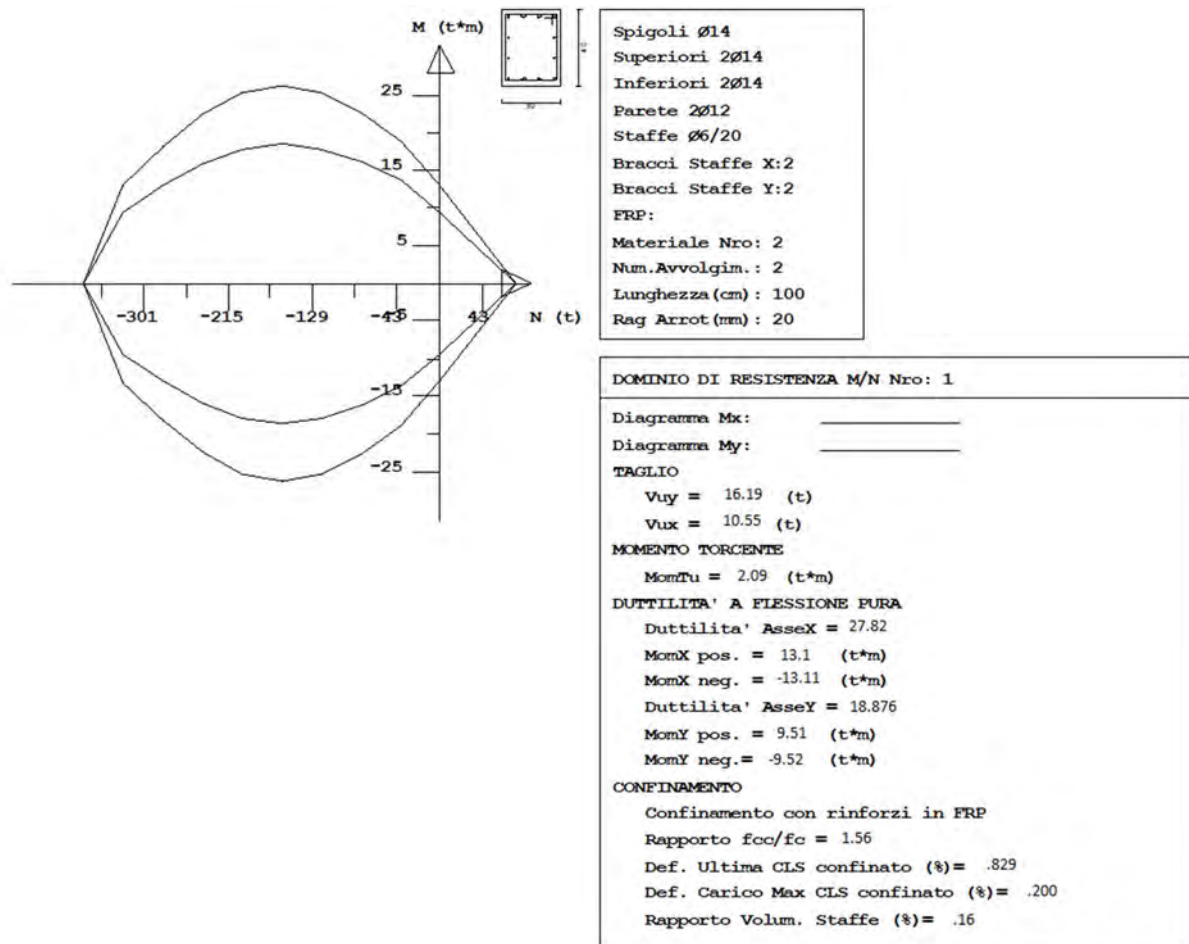
$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{f_{leff}}{f_c}} = 0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{10.185}{200}} = 0.00689 \text{ (cfr. Linee Guida 3.43)}$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 1: Def. Ultima cls confinato).

Nell'applicazione della formula si è utilizzato il valore della resistenza del calcestruzzo senza ridurla del coefficiente parziale, trattandosi di utilizzo della deformazione in un'analisi non lineare.

Circolare Esplicativa 2009

Avendo disposto due strati di FRP alle estremità del pilastro per soddisfare la verifica del nodo del test 2, il software fornisce in questo caso dei risultati diversi:



Considerando quindi un valore dello spessore t_f pari al doppio del precedente ($0.0165 \times 2 = 0.033 \text{ mm}$), vanno modificati alcuni calcoli:

$$\rho_f = \frac{2 \cdot 2t_f \cdot (b + \square) \cdot b_f}{b \cdot h \cdot p_f} = \frac{2 \cdot 0.033 \cdot (30 + 40)}{30 \cdot 40} = 0.00385$$

$$f_l = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{f,d,rid} = \frac{1}{2} \cdot 0.00385 \cdot 3000000 \cdot 0.0078 = 45.455 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{l,eff} = f_l \cdot k_{\square} \cdot k_v \cdot k_{\alpha} = 45.455 \cdot 0.452 \cdot 1 \cdot 1 = 20.370 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{f_{l,eff}}{f_c}} = 0.0035 + 0.015 \cdot \sqrt{\frac{20.370}{200}} = 0.00829$$

Valore identico a quello fornito dal software (cfr. dominio di resistenza 1: Def. Ultima cls confinato).

Test di verifica n°30

Resistenza a taglio in condizioni cicliche per travi e pilastri

Per gli elementi travi e pilastri per i quali l'armatura è inserita in input, è possibile attivare la verifica a taglio ciclico per strutture esistenti con la formula C8.7.2.8 della Circolare M.I.T. del 21/01/2019 n°7 pubblicata in G.U. n°35 l'11/02/2019. Questa formula tiene conto di tre contributi: il primo termine è legato allo sforzo normale (VNR), il secondo alla resistenza a trazione del calcestruzzo (VCR) e il terzo all'armatura a taglio (VWR). Separando tali contributi, la C8.7.2.8 si può scrivere come:

$$V_R = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR}$$

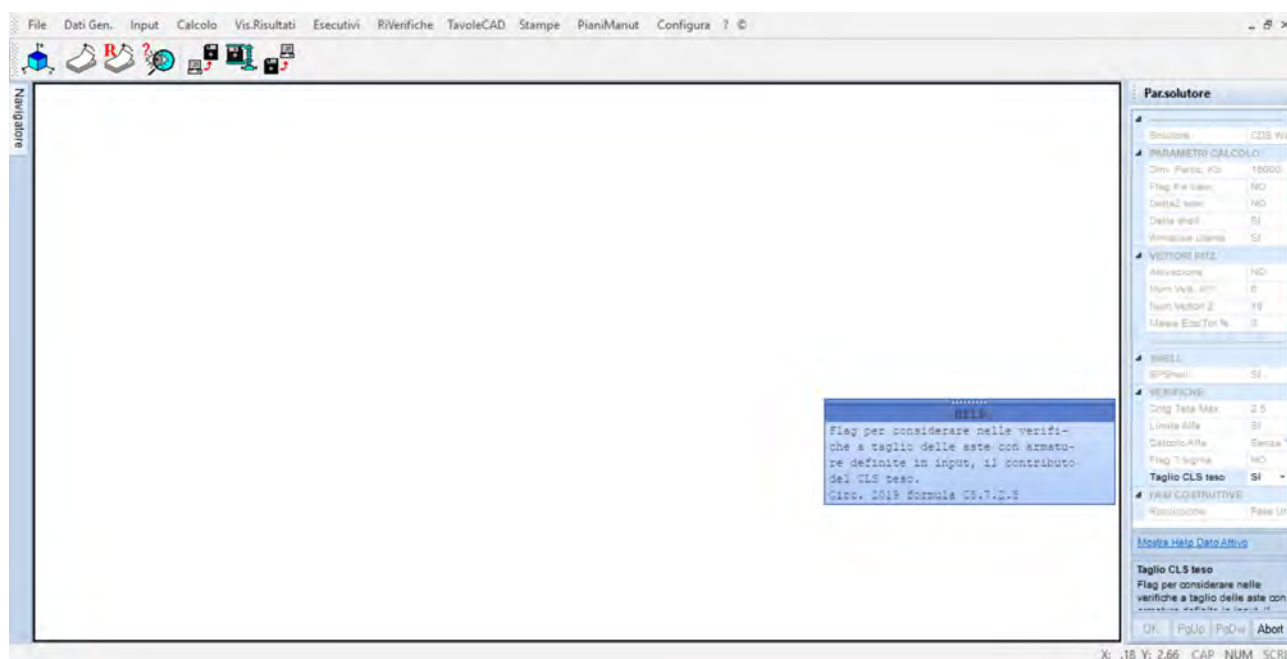
In maniera esplicita i tre termini sono:

$$V_{NR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \frac{h - x}{2L_V} \cdot \min(N; 0.55 \cdot A_c \cdot f_c)$$

$$V_{CR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \left(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})\right) \cdot (0.16 \cdot \max(0.5; 100 \cdot \rho_{tot})) \cdot \left(1 - 0.16 \cdot \min\left(5; \frac{L_V}{h}\right)\right) \cdot \sqrt{f_c} \cdot A_c$$

$$V_{WR} = \frac{1}{\gamma_{el}} \cdot \left(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})\right) \cdot V_W$$

In CDS l'attivazione del parametro *Taglio cls tes* interviene sul calcolo del taglio resistente per gli estremi degli elementi dove si possono attivare le cerniere plastiche. In mezzzeria si continuano ad utilizzare le formule del Capitolo 4 - Paragrafo 4.1.2.3.5.2 Elementi con armature trasversali resistenti al taglio.



La determinazione del taglio resistente, dipendendo dalle sollecitazioni agenti (per la presenza nelle formule dello sforzo normale e della luce di taglio, rapporto tra momento flettente e taglio) non fornisce un univoco valore in base all'armatura, ma un risultato variabile in base alla combinazione di carico in esame. Ciò comporta che la verifica della sezione, eseguita col confronto fra la sollecitazione agente e quella resistente, deve essere effettuata con valori diversi per ogni combinazione; inoltre non è detto che la combinazione più gravosa sia quella con le sollecitazioni più elevate, ma si ha in corrispondenza del valore massimo del rapporto tra sollecitazione agente e sollecitazione resistente (coefficiente d'impegno).

Si studia un caso pratico dell'applicazione della formula in questione, ponendo l'attenzione su due elementi strutturali, un pilastro (asta 1) e una trave (asta 5), al fine di determinarne il taglio resistente in condizioni cicliche.

Applicazione della formula C8.7.2.8 al pilastro (asta 1)

Si riporta la tabella di stampa del pilastro del quale si vuole calcolare manualmente il taglio resistente. Si può notare come la combinazione più gravosa nelle sezioni in testa e al piede sia la 12.

STAMPA PROGETTO S.L.U. - AZIONI S.L.V. - PILASTRI																																	
VERIFICA A PRESSO-FLESSIONE														VERIFICA A TAGLIO E TORSIONE																			
Fin.	Final	a	Bas	n	Co	M	Ed	M	Eyd	N	Ed	x/	tf	tc	Area	cmq	Co	V	Ed	V	Eyd	T	Sdu	V	Rxd	V	Ryd	TRd	TRld	Coe	Coe	Alon	Staffe
Ctg	N/Nc	t	Alt	c	mb	(t*m)	(t*m)	(t)	/d	100	100	b	h	mb	(t)	(t)	(t)	(t*m)	(t)	(t)	(t)	(t*m)	(t*m)	Cl	Sta	cmq	Pas	Lun	Fi				
1	0.00	1	1	8	-1.5	3.2	-12.9	11	11	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	3.2	3.0	1.0	0.0	24	100	0.0	25	30	6								
1	3.00	30	3	14	-0.5	-1.2	-23.6	0	4	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	4.5	4.5	1.0	0.0	24	73	0.0	25	200	6								
2.5	0.20	30	5	14	1.0	2.8	-23.3	5	8	4.5	4.5	12	3.3	0.7	0.0	4.7	7.5	1.0	0.0	24	69	0.0	25	30	6								

Tali risultati si possono riscontrare nella tabella seguente, nella quale sono riportate le sollecitazioni e il coefficiente di impegno per ciascuna combinazione di carico. La combinazione 12 è evidenziata poiché risulta la più gravosa, in quanto, come si può constatare, è quella con il coefficiente d'impegno più alto per entrambi gli estremi. Essendo il taglio un meccanismo fragile, il fattore di comportamento massimo adottabile è pari a 1.5; quindi, poiché il fattore di comportamento utilizzato nell'analisi è 2, i diagrammi del taglio nella fase di visualizzazione risultati non coincidono con i valori trovati nella tabella di verifica.

Il software avrebbe potuto accoppiare il taglio resistente minimo, per esempio 2512kg al piede in direzione x, con la corrispondente sollecitazione agente massima pari a 3259kg, determinando un coefficiente d'impegno 1.297; tale valore è decisamente in sicurezza, ma maggiore dell'1.004 determinato in maniera più rigorosa.

Pilastro: asta numero 1

Comb.	Imp.tes	VS _{x,tes}	VR _{x,tes}	VS _{y,tes}	VR _{y,tes}	Imp.pie	VS _{x,pie}	VR _{x,pie}	VS _{y,pie}	VR _{y,pie}
1	0.085	552	6422	-552	6422	0.059	552	9290	-552	9290
2	0.560	-2623	4676	349	16126	0.972	-2623	2697	349	2512
3	0.501	-2368	4725	604	6601	0.879	-2368	2694	604	2597
4	0.543	-2546	4689	425	10073	0.944	-2546	2696	425	2546
5	0.483	-2292	4742	680	6193	0.851	-2292	2692	680	2611
6	0.513	-2546	4963	-1240	3833	0.896	-2546	2842	-1240	3308
7	0.456	-2292	5020	-985	3686	0.807	-2292	2836	-985	3451
8	0.530	-2623	4948	-1316	3868	0.922	-2623	2843	-1316	3275
9	0.473	-2368	5001	-1062	3737	0.834	-2368	2838	-1062	3402
10	0.677	3183	4695	604	8117	0.979	3183	3249	604	2943
11	0.626	2928	4672	349	25475	0.895	2928	3268	349	2784
12	0.693	3259	4701	680	7514	1.004	3259	3245	680	2969
13	0.642	3005	4679	425	14048	0.921	3005	3262	425	2849
14	0.670	3259	4860	-985	4217	0.970	3259	3359	-985	3941

15	0.621	3005	4837	-1240	4383	0.889	3005	3376	-1240	3782
16	0.655	3183	4853	-1062	4274	0.946	3183	3363	-1062	3886
17	0.606	2928	4830	-1316	4421	0.865	2928	3382	-1316	3746
18	0.483	-680	6193	2292	4742	0.851	-680	2611	2292	2692
19	0.501	-604	6601	2368	4725	0.879	-604	2597	2368	2694
20	0.543	-425	10073	2546	4689	0.944	-425	2546	2546	2696
21	0.560	-349	16126	2623	4676	0.972	-349	2512	2623	2697
22	0.642	-425	14048	-3005	4679	0.921	-425	2849	-3005	3262
23	0.626	-349	25475	-2928	4672	0.895	-349	2784	-2928	3268
24	0.693	-680	7514	-3259	4701	1.004	-680	2969	-3259	3245
25	0.677	-604	8117	-3183	4695	0.979	-604	2943	-3183	3249
26	0.473	1062	3737	2368	5001	0.834	1062	3402	2368	2838
27	0.456	985	3686	2292	5020	0.807	985	3451	2292	2836
28	0.530	1316	3868	2623	4948	0.922	1316	3275	2623	2843
29	0.513	1240	3833	2546	4963	0.896	1240	3308	2546	2842
30	0.606	1316	4421	-2928	4830	0.865	1316	3746	-2928	3382
31	0.621	1240	4383	-3005	4837	0.889	1240	3782	-3005	3376
32	0.655	1062	4274	-3183	4853	0.946	1062	3886	-3183	3363
33	0.670	985	4217	-3259	4860	0.970	985	3941	-3259	3359

Dal momento che la formula del taglio resistente dipende dalle sollecitazioni agenti, i calcoli manuali verranno effettuati solo per la combinazione 12, considerando i quattro casi:

- pilastro in testa, direzione y
- pilastro in testa, direzione x
- pilastro al piede, direzione y
- pilastro al piede, direzione x

Dalla struttura di test si considerano i seguenti dati:

- coefficiente di sicurezza per elementi primari $\gamma_{el}=1.15$
- resistenza di progetto del calcestruzzo $f_{cd}=133\text{kg/cm}^2=13.3\text{MPa}$
- resistenza di progetto dell'acciaio $f_{yd}=3304\text{kg/cm}^2$
- la parte plastica della domanda di duttilità in rotazione $\mu_{\Delta,pl}$, non essendo determinabile senza un'analisi non lineare trattandosi di una domanda di rotazione della cerniera plastica, è stata posta in sicurezza pari a 5 per verifiche nelle combinazioni sismiche; per quelle statiche, non essendo richiesta una duttilità, $\mu_{\Delta,pl}=0$
- base $b=30\text{cm}$
- altezza $h=30\text{cm}$

- altezza utile $d=30-3.2=26.8\text{cm}$
- area della sezione $A_c=26.8 \cdot 30=804\text{cm}^2$
- armatura longitudinale totale $12\phi 12=13.57\text{cm}^2$
- densità geometrica dell'armatura $\rho_{tot}=13.57/804=1.69 \cdot 10^{-2}$
- area staffe $2\phi 6=0.56\text{cm}^2$
- passo staffe 25cm

Le sollecitazioni in testa al pilastro nella combinazione 12 per determinare il taglio resistente in direzione y risultano le seguenti:

- sforzo normale $N=-19978\text{kg}$
- momento flettente $M_x=-24235\text{kg cm}$
- taglio $T_y=430\text{kg}$

Si ricavano quindi le altre grandezze utili ai fini del calcolo del taglio resistente in condizioni cicliche. La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = h \left(0.25 + 0.85 \frac{N}{A_c \cdot f_c} \right) = 12.64\text{cm}$$

La luce di taglio si calcola come:

$$L_v = \frac{24235}{430} = 56.30\text{cm}$$

Per calcolare il contributo dello sforzo normale al taglio resistente, si ottiene:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 58813\text{kg} > 19978\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.64}{2 \cdot 56.30} \cdot 19978 = 2736\text{kg}$$

Per determinare il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente, si calcolano separatamente i tre fattori.

Il coefficiente per la duttilità vale:

$$\left(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl}) \right) = 0.75$$

Il coefficiente per l'armatura longitudinale è:

$$(0.16 \cdot \max(0.5; 100 \cdot \rho_{tot})) = 0.27$$

Il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$\left(1 - 0.16 \cdot \min\left(5; \frac{L_v}{h}\right) \right) = 0.70$$

dove:

$$\frac{L_v}{h} = 1.877 < 5$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.70 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 3614\text{kg}$$

Infine si calcola il contributo delle staffe:

$$V_W = \frac{0.56}{25} \cdot 0.9 \cdot 26.8 \cdot 3304 = 1785\text{kg}$$

$$V_{WR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 1785 = 1164\text{kg}$$

Complessivamente, la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione y in testa al pilastro considerato risulta:

$$V_{Ry} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 2736 + 3614 + 1164 = 7514\text{kg}$$

valore riscontrabile in tabella.

Si effettuano i calcoli in testa al pilastro con le sollecitazioni agenti in direzione x:

- sforzo normale $N=-19978\text{kg}$
- momento flettente $M_y=277547\text{kg cm}$
- taglio $T_x=2524\text{kg}$

La profondità dall'asse neutro rimane invariata, essendo il pilastro di sezione quadrata. Rimangono invariati anche il coefficiente per la duttilità e quello per l'armatura longitudinale.

Si riportano quindi solo i valori numerici che cambiano.

La luce di taglio diventa:

$$L_V = \frac{277547}{2524} = 109.96\text{cm}$$

Quindi, il contributo dello sforzo normale al taglio resistente sarà:

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.64}{2 \cdot 109.96} \cdot 19978 = 1401\text{kg}$$

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{109.96}{26.8} = 3.67 < 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 3.67) = 0.414$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.27 \cdot 0.414 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 804 = 2136\text{kg}$$

Il contributo delle staffe rimane lo stesso:

$$V_{WR} = 1164\text{kg}$$

Quindi la resistenza a taglio in condizioni cicliche in direzione x in testa al pilastro considerato risulta:

$$V_{Rx} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 1401 + 2136 + 1164 = 4701\text{kg}$$

anche questo riscontrabile in tabella.

Si analizzi adesso la condizione al piede del pilastro sempre in combinazione 12. Le sollecitazioni per determinare il taglio resistente in direzione y risultano le seguenti:

- sforzo normale $N=-20563\text{kg}$
- momento flettente $M_x=87700\text{kg cm}$
- taglio $T_y=430\text{kg}$

La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = 30.0 \cdot \left(0.25 + 0.85 \frac{20563}{804 \cdot 133} \right) = 12.40\text{cm}$$

La luce di taglio si calcola come:

$$L_V = \frac{87700}{430} = 203.75\text{cm}$$

Per calcolare il contributo dello sforzo normale al taglio resistente, si ottiene:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 58813\text{kg} > 20563\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = \frac{1}{1.15} \cdot \frac{30.0 - 12.40}{2 \cdot 203.75} \cdot 20563 = 772\text{kg}$$

Anche in questo caso rimangono invariati il coefficiente per la duttilità e quello per l'armatura longitudinale.

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{203.75}{30.0} = 6.79 > 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 5) = 0.20$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

Come nel caso del pilastro, tali risultati si possono riscontrare nella tabella seguente, nella quale sono specificati, per ciascuna combinazione, il coefficiente di impegno e le sollecitazioni ai due estremi della trave. La combinazione 2 per il primo estremo e la combinazione 12 per il secondo sono evidenziate perché risultano le più gravose.

Trave: asta numero 5

Comb.	Imp.ini	VS _{y,ini}	VR _{y,ini}	Imp.fin	VS _{y,fin}	VR _{y,fin}
1	0.443	4158	9380	0.443	-4158	9380
<u>2</u>	0.468	-1177	2515	<u>1.847</u>	<u>-5973</u>	<u>3234</u>
3	0.347	-873	2515	1.735	-5669	3267
4	0.431	-1086	2515	1.813	-5882	3243
5	0.310	-782	2515	1.701	-5578	3278
6	0.431	-1086	2515	1.813	-5882	3243
7	0.310	-782	2515	1.701	-5578	3278
8	0.468	-1177	2515	1.847	-5973	3234
9	0.347	-873	2515	1.735	-5669	3267
10	1.813	5882	3243	0.431	1086	2515
11	1.701	5578	3278	0.310	782	2515
<u>12</u>	<u>1.847</u>	<u>5973</u>	<u>3234</u>	0.468	1177	2515
13	1.735	5669	3267	0.347	873	2515
14	1.847	5973	3234	0.468	1177	2515
15	1.735	5669	3267	0.347	873	2515
16	1.813	5882	3243	0.431	1086	2515
17	1.701	5578	3278	0.310	782	2515
18	0.282	1187	4195	0.997	-3609	3619
19	0.297	1278	4303	0.965	-3518	3642
20	0.329	1491	4521	0.892	-3305	3701
21	0.347	1583	4559	0.861	-3213	3728
22	0.329	1491	4521	0.892	-3305	3701
23	0.347	1583	4559	0.861	-3213	3728

24	0.282	1187	4195	0.997	-3609	3619
25	0.297	1278	4303	0.965	-3518	3642
26	0.892	3305	3701	0.329	-1491	4521
27	0.861	3213	3728	0.347	-1583	4559
28	0.997	3609	3619	0.282	-1187	4195
29	0.965	3518	3642	0.297	-1278	4303
30	0.997	3609	3619	0.282	-1187	4195
31	0.965	3518	3642	0.297	-1278	4303
32	0.892	3305	3701	0.329	-1491	4521
33	0.861	3213	3728	0.347	-1583	4559

Per l'applicazione numerica sulla trave in esame, si considerino i seguenti dati:

- coefficiente di sicurezza per elementi primari $\gamma_{el}=1.15$
- resistenza di progetto del calcestruzzo $f_{cd}=133\text{kg/cm}^2=13.3\text{MPa}$
- resistenza di progetto dell'acciaio $f_{yd}=3304\text{kg/cm}^2$
- parte plastica della domanda di duttilità $\mu\Delta,pl=5$
- base $b=30\text{cm}$
- altezza $h=40\text{cm}$
- altezza utile $d=40-3.2=36.8\text{cm}$
- area della sezione $A_c=36.8\cdot30=1104\text{cm}^2$
- armatura longitudinale totale $4\phi12+2\phi12=6.79\text{cm}^2$
- densità geometrica dell'armatura $\rho_{tot}=6.79/1104=0.615\cdot10^{-2}$
- area staffe $2\phi6=0.56\text{cm}^2$
- passo staffe 20cm

Si prendono in considerazione le sollecitazioni nell'estremo finale della trave (asta 5) nella combinazione 2; poiché la trave ha comportamento flessionale nel piano verticale, le sollecitazioni da considerare sono solo quelle in direzione y:

- sforzo normale $N=0\text{kg}$
- momento flettente $M_x=662437\text{kg cm}$
- taglio $T_y=5080\text{kg}$

Se ne deduce che per la trave in questione va analizzato un unico caso: solo la direzione y per il comportamento flessionale della trave, solo un estremo per la simmetria della struttura e dei carichi agenti.

Si ricavano quindi le grandezze utili ai fini del calcolo del taglio resistente in condizioni cicliche.

La profondità dell'asse neutro vale:

$$x = 40 \left(0.25 + 0.85 \frac{0}{1104 \cdot 133} \right) = 10.00\text{cm}$$

La luce di taglio è:

$$L_V = \frac{662437}{5080} = 130.40\text{cm}$$

Poiché nella trave lo sforzo normale è nullo, il suo contributo al taglio resistente sarà anch'esso nullo:

$$0.55 \cdot A_c \cdot f_c = 80758\text{kg} > 0\text{kg} = N$$

$$V_{NR} = 0\text{kg}$$

Per determinare il contributo del calcestruzzo al taglio resistente, si calcolano separatamente i tre fattori.

Il coefficiente per la duttilità vale ancora:

$$(1 - 0.05 \cdot \min(5; \mu_{\Delta,pl})) = 0.75$$

Il coefficiente per l'armatura longitudinale è:

$$(0.16 \cdot \max(0.5; 0.615)) = 0.10$$

Poiché:

$$\frac{L_V}{h} = \frac{130.40}{40} = 3.26 < 5$$

il coefficiente per la luce di taglio risulta:

$$(1 - 0.16 \cdot 3.26) = 0.48$$

Il contributo del calcestruzzo teso al taglio resistente vale:

$$V_{CR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 0.10 \cdot 0.48 \cdot (\sqrt{13.3} \cdot 10) \cdot 1104 = 1235kg$$

Infine si calcola il contributo delle staffe:

$$V_W = \frac{0.56}{20} \cdot 0.9 \cdot 36.8 \cdot 3304 = 3064kg$$

$$V_{WR} = \frac{1}{1.15} \cdot 0.75 \cdot 3064 = 1998kg$$

Complessivamente, la resistenza a taglio in condizioni cicliche della trave risulta:

$$V_{Ry} = V_{NR} + V_{CR} + V_{WR} = 0 + 1235 + 1998 = 3234kg$$

valore riscontrabile in tabella.

Appendice A

Rapporti tra le unità anglosassoni e quelle metriche

Generalmente i simboli americani ed inglesi, relativi alle unità di misura, si trovano scritti in modo non omogeneo in parte con lettere maiuscole (p.e. Lb) oppure minuscole (lb.) e nel plurale viene talvolta inserita una s (lbs).

Nella tabella che segue vengono riportate le principali unità di misura anglosassoni con relativi fattori di conversione per il sistema SI.

<i>Grandezza fisica</i>	<i>Unità anglosassone</i>	<i>Relazioni con le unità metriche</i>
<i>Lunghezza l</i>	<i>Inch (pollice)</i> <i>Foot (piede)</i> <i>Mile (miglio)</i>	<i>1 in. = 25.40 mm</i> <i>1 ft. = 30.48 cm</i> <i>1 ml. = 1.6093 Km</i>
<i>Superficie A</i>	<i>Square inch</i> <i>Square foot</i>	<i>1 sq. In. = 6.4516 cm²</i> <i>1 sq. Ft. = 929.03 cm²</i>
<i>Volume V</i>	<i>Cubic inch</i> <i>Cubic foot</i>	<i>1 cu. In. = 16.387 cm³</i> <i>1 cu. Ft. = 28.317 cm³</i>
<i>Velocità v</i>	<i>Foot/second</i> <i>Mile/hour</i>	<i>1 ft./sec. = 0.3048 m/s</i> <i>1 mi./hr. = 1.6093 Km/h</i>
<i>Accelerazione a</i>	<i>Foot/second²</i>	<i>1 ft./sec² = 30.48 cm/s²</i> <i>32.17 ft./sec² = 981 cm/s²</i>
<i>Forza peso F</i>	<i>Grain</i> <i>Ounce</i> <i>Pound</i> <i>Kip (1000 lb)</i>	<i>1 gr. = 0.068 g</i> <i>1 oz. = 28.35 g</i> <i>1 lb. = 0.45359 Kg</i> <i>1 Kip = 453.6 Kg</i>
<i>Temperatura t</i>	<i>Degree Fahrenheit</i> <i>Degree Rankine</i>	<i>°F = 9/5°C + 32</i> <i>°Rank = -273.15°C</i>
<i>Pressione p</i>	<i>Pound/square foot</i> <i>Pound/square inch</i>	<i>1 lb./sq. Ft. = 48.82 N/m²</i> <i>1 psi = 0,07030696 Kg/cm²</i>
<i>Densità q</i>	<i>Pound/ cubic inch</i> <i>Pound/ cubic foot</i>	<i>1 lb./cu. In. = 27.66 g/cm³ (Kg/l)</i> <i>1 lb./cu. Ft. = 16.019 Kg/m³</i>
<i>Frequenza ω</i>	<i>Cycle/second (1Hertz)</i>	<i>1 cycle/sec = 6.283185 rad/s</i>

Carichi

- Carichi per unità di lunghezza**

<i>1 pound per inch = 1 lb. /in.</i>	<i>17.858 Kg/m = 175.187 N/m</i>
<i>1 pound per foot = 1 lb. /ft.</i>	<i>1.488 Kg/m = 14,597 N/m</i>
<i>1 Kilopound per foot = 1 Kip /ft.</i>	<i>1.488 t/m = 14,597 KN/m</i>

- Carichi per unità di lunghezza**

<i>1 pound per square inch = 1 psi = 1 lb. /in.²</i>	<i>0.6896 N/cm²</i>
<i>1 pound per square foot = 1 psf = 1 lb. /ft.²</i>	<i>4.8826 Kg/m² = 47.8983 N/m²</i>
<i>1 Kilopound per square inch = 1 Kip /ft.</i>	<i>157.4810 Kg/cm² = 1544.889 N/cm²</i>

- Momenti**

<i>1 inch³ = 1 in. ³ = Momento resistente</i>	<i>16.387 cm³</i>
<i>1 inch⁴ = 1 in. ⁴ = Momento d'inerzia</i>	<i>41.623 cm⁴</i>
<i>1 pound inch = 1 lb. in.</i>	<i>1.152 Kg cm = 11.301 N cm</i>
<i>1 pound foot = 1 lb. ft. = 12 lb. in.</i>	<i>13.825 Kg cm = 135.623 N cm</i>

Bibliografia

- [1] A&C- Analisi e calcolo n° 5, Apr.-Giu. 2001
- [2] A&C- Analisi e calcolo n° 6, Lug.-Set. 2001
- [3] A&C- Analisi e calcolo n° 8, Gen.-Mar. 2002
- [4] Timoshenko, Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems 3rd Edition. D. Van Nostrand Co., Inc. New York, N. 1955.
- [5] W. Nash, Strength of Material
- [6] Tuma, J.J., Munsir, R.K., Theory and Problems of Advanced Structural Analysis, Schaums's Outline Series, McGraw-Hill
- [7] Seely, F. B., and Smith, J.O., "Advanced Mechanics of Materials", Second Edition, John Wiley and Sons
- [8] NAFEMS, Background to Benchmarks, 1993.
- [9] Crandall, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Book Co., Inc.. New York, NY. 1959.
- [10] Cremonese, Manuale Ingegneria Civile, ESAC, SEZ. I e II
- [11] Ray, W. Clough, Joseph Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Company
- [12] Thomson, Vibration Theory and Applications
- [13] Blevins, Robert D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- [14] The STANDARD NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 5 October, 1990
- [15] Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", Second Edition, McGraw-Hill, 1959, pg. 113 - 117.
- [16] CISM International Centre For Mechanical Sciences – Analisi per elementi finite: Modellazione strutturale e controllo dei risultati. A cura di B. A. Schrefler – A. A. Camaro